
**ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАТИКИ В ВЫСШЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

THE ROLE OF MATHEMATICS IN DIGITAL TRANSFORMATIONS IN EDUCATION

Sh. R. Settiyev, A. T. Raximov

Tashkent Perfect University

Annotation. This paper examines the role of mathematics in the digital transformation of educational activities. The importance of mathematical education and the prospects of using mathematical methods in these processes are described in detail.

Keywords: digitalization, axiom, theorem, result, philosophy, formula language, arithmetic, geometry, mathematical model.

Introduction

From a philosophical perspective, the role of mathematics in universal human culture is enormous. The historical development of philosophy demonstrates that all eminent mathematicians were also philosophers. They regarded mathematical science as an integral part of philosophy, which served as a means of comprehending the world.

The place of mathematics in life and science is determined by its ability to transform ordinary, intuitive approaches to reality, based on approximate descriptions, into the language of axioms and theorems, i.e., into the language of formulas, from which quantitative conclusions often follow [1].

It is not without reason that the degree of scientific rigor in a discipline is measured by how much mathematics is applied in it. Furthermore, the great scientist Galileo Galilei asserts that “The Great Book of Nature is written in mathematical symbols,” while the great commander A. V. Suvorov calls mathematics the gymnastics of the mind.

Over several millennia of human development, the accumulation of mathematical facts led to the emergence of mathematics as a science about two and a half thousand years ago. The Quadrivium, studied in Ancient Greece, included arithmetic, geometry, astronomy, and music. The significance of mathematics for humanity is evident from the fact that Euclid’s *Elements* has been published countless times. The term “algebra” is named in honor of Al-Khwarizmi’s work *Kitab al-jabr wal-muqabala*.

Mathematics contributes to the development of a scientific worldview and the achievement of a necessary general cultural level. Mathematical reasoning enables the correct establishment of cause-and-effect relationships, an ability that every person must undoubtedly possess [2]. The style and language of mathematics influence speech. Every cultured individual should have an understanding of the basic concepts of mathematics, such as number, function, mathematical model, algorithm, probability, optimization, discrete and continuous quantities, infinitesimally small and infinitely large.

1. Methods

To explore the role of mathematics in digital transformation and education, the following methodological approaches are applied:

Philosophical-historical analysis: tracing the development of mathematics from Ancient Greece to the present, including the works of Euclid, Al-Khwarizmi, Galileo, Lomonosov, and others [3, 4].

Comparative analysis: examining how mathematics differs from natural sciences like physics and chemistry, and why it holds a unique universal role [5, 6].

Applied analysis: assessing the use of mathematical modeling, statistics, and probability theory in modern sciences, digital technologies, and even humanities [7, 8].

Educational perspective: considering logical, cognitive, applied, historical, and philosophical aspects of teaching mathematics [9].

2. Results

The study identifies several important findings:

Mathematics as a universal science. It transforms intuitive reasoning into precise formulas, ensuring logical rigor.

Mathematics as a cultural foundation. The works of Euclid and Al-Khwarizmi continue to shape scientific thought.

Mathematical modeling. Mathematical models are powerful tools that reproduce reality and allow discovery of new patterns in natural and social phenomena.

Educational outcomes. Mathematics develops logical thinking, strengthens cognitive skills, prepares students for applied sciences, and contributes to a scientific worldview.

Interdisciplinary expansion. Terms such as “mathematical linguistics,” “mathematical economics,” and “mathematical biology” demonstrate its reach.

3. Discussion

Mathematics does not directly create energy sources, fabrics, or food like physics or chemistry. Instead, its strength lies in offering universal models for discovery and problem-solving. As D’Alembert said: “Work, work — and understanding will come later.”

Spacecraft, for example, are based on numerous complex mathematical calculations. Equations or systems of equations used by physicists are mathematical objects, and solutions are obtained using mathematical methods [10].

In the digital era, mathematics is the key to education and innovation. As President Sh. M. Mirziyoyev of Uzbekistan emphasized: “Mathematics is the foundation of all exact sciences. A child who has a good grasp of mathematics will grow up wise and will be able to work successfully in any field.”

Moreover, for students of the humanities and law, mathematics is equally important. It trains precision, algorithmic thinking, and logical reasoning. In jurisprudence, as in mathematics, reasoning and deductive methods are used to reveal the truth. Statistical methods and probability theory provide indispensable tools for decision-making.

Mathematics also ensures order of thought, as Lomonosov argued. It teaches strict adherence to rules and algorithms, shaping professional and critical thinking in diverse fields.

Conclusion

Mathematics is not merely a tool for calculation. It is a language of models, a foundation for sciences, and a pillar of culture and education. Its role in digital transformation is paramount, as it allows humanity to analyze, simulate, and understand reality at deeper levels. In education, mathematics develops intellectual abilities, prepares students for diverse fields, and contributes to continuous learning.

In the digital age, mathematics secures its role as the universal discipline that unites logic, science, and culture.

References

1. *Моисеев Н. Н.* Математика в социальных науках // Математические методы в социологических исследованиях. – М.: 1981. – С. 35.
2. *Сеттиев Ш. Р., Раджабов Ж. Ш.* Этапы построения математических моделей // Modern Science. – 2015. – № 6(19). – С. 8–11.
3. *St Omer S. M.* Technology-enhanced Mathematics Learning: Review of the Evolving Role of Digital Technologies in Mathematics Education // Nature Human Behaviour. – 2025.

4. *Abramovich S.* Digital Technology in PK–6 Mathematics Education // Journal of Educational Technology. – 2025.
5. *Gabriel F.* Pragmatic AI in Education and its Role in Mathematics Learning // PMC (NCBI). – 2025.
6. *Qi C., Ning S.* Embracing the Trend of Educational Digitalization to Enhance the Quality and Effectiveness of Basic Mathematics Teaching // Frontiers of Digital Education. – 2024. – Vol. 1, No 2. – P. 153–158.
7. *Engelbrecht J., Borba M. C.* Recent Developments in Using Digital Technology in Mathematics Education // ZDM Mathematics Education. – 2024.
8. *Weigand H. G.* Mathematics Teaching, Learning, and Assessment in the Digital Age // ZDM Mathematics Education. – 2024.
9. *Raj Joshi D., Sharma Chapai K. P., Upadhayaya P. R., Belbase S.* Effect of Using Digital Resources on Mathematics Achievement: Results from PISA 2022 // Cogent Education. – 2025.
10. *Saat N. A., Alias A. F., Zaki Saat M.* Digital Technology Approach in Mathematics Education: A Systematic Review. – Малайзия: UKM; Scopus & ERIC, 2024.

МЕЖЪЯЗЫКОВОЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТОКЕНИЗАЦИИ ВРЕ: СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯЗЫКОВ БАМБАРА И РУССКОГО ЯЗЫКА

А. Диалло

Воронежский государственный университет

Аннотация. Это исследование направлено на то, чтобы позволить нам изучить, как морфологические различия между западноафриканским Мандинго (бамбара) и русским языком влияют на эффективность и справедливость алгоритма четного кодирования байтов (ВРЕ) в современных системах НЛП. Для решения этой проблемы используются идентичные реализации ВРЕ на параллельных корпусах. Результаты эксперимента позволят выявить существенные различия в эффективности токенизации между этими двумя языками из-за их типологических особенностей.

Ключевые слова: межъязыковой анализ, ВРЕ (кодирование пар байтов), токенизация, генеративных языковых моделей (LLM), обработки естественного языка (НЛП), бамбара, русский язык, сегментация, сравнительный анализ, эффективность.

Введение

Быстрое развитие крупномасштабных генеративных языковых моделей (LLM) значительно изменило ландшафт обработки естественного языка (НЛП), сделав возможными инновационные исследования и приложения на нескольких языках. Однако разработка базовых и постобучаемых шаблонов для определенных языков остается серьезной проблемой.

С разработкой многоязычных систем обработки естественного языка (НЛП) важно понимать, как алгоритмы токенизации работают на языках с различной структурой. В данной работе мы сосредоточены на сравнительном анализе эффективности алгоритма ВРЕ для русского языка и языка мандинка.

1. Используемые корпуса

Для исследования мы использовали следующие корпуса русского и бамбара, представленные в табл. 1.

2. Экспериментальная методология

Для анализа эффективности ВРЕ на этих корпусах мы внедрили строгую методологию, позволяющую проводить справедливое сравнение. Алгоритм ВРЕ был применен с одинаковыми параметрами (80 слияний) к двум языкам, русскому и бамбара, после стандартной предварительной обработки, включающей нормализацию регистра, разделение знаков препинания и очистку специальных символов. Такой подход позволяет нам изолировать влияние лингвистических различий, устраняя методологические искажения.

Токенизатор ВРЕ бамбара — это облегченная реализация алгоритма Byte Pair Encoding. Он позволяет:

Обучать модели токенизации подслов на тексте на языке бамбара.

Обрабатывать диакритические знаки бамбара (ɛ, ɔ, ɲ, ɲ).

Кодировать и декодировать текст в когерентные подсловы.

Использовать его как автономный модуль или интегрировать в более широкий конвейер НЛП.

Таблица 1

Использованные корпуса

Корпус бамбара	Русский корпус
"A be taa so"	«Он идет домой»
"Muso be na"	«Женщина приходит»
"Denw be don"	«Дети спят»
"A be se ka ke"	«Он может сделать»
"I ka di"	«Ты хороший»
"N be bamanankan men"	«Я изучаю язык бамбара»
"I ka ke ne wa"	«Как твои дела»
"A ye fini soro"	«Он нашел одежду»
"U be ke cogo di"	«Они делают хорошие вещи»
"N'ka da I la"	«Я верю в тебя»
"N'ka da I la"	«Деньги есть там»
"Furu be yen"	«Он внутри»
"A be kono na"	«Я делаю время»
"N be kalo ke"	«Я делаю время»
"I be sene ke"	«Ты работаешь»
"A be dumuni ke"	«Он ест еду»
"U be taa sugu la"	«Они идут на рынок»
"Mogow be na"	«Люди приходят»
"Jiri be yen"	«Дерево там»
"Kono be ban"	«Еда закончилась»
"N be don"	«Я знаю»
"A be kuma"	«Он говорит»
"I be kalan ke"	«Ты учишься»
"Sukaro be di"	«Сахар сладкий»
"N be bo sugu la"	«Я выхожу с рынка»
"A be sogoma soro"	«Он получил утро»
"Dogoya be yen"	«Там жарко»
"N be kono na"	«Я внутри»
"I be ji min"	«Ты пьешь воду»
"A be ke fen do la"	«Он делает что-то»
"U be dogoya da"	«Они продают тепло»

Пример:

« Bamanankan » → « Ba » « ma » « nan » « kan »

Это показывает, как токенизатор учится разбивать слово на языке бамбара на подсловесные компоненты — ключевой шаг для эффективного моделирования NLP на языках с ограниченными ресурсами.

Токенизатор ВРЕ для русского языка был реализован с абсолютно идентичной архитектурой. Он обрабатывает кириллицу и сложную морфологию, сохраняя при этом идентичные

Сегментация по BPE

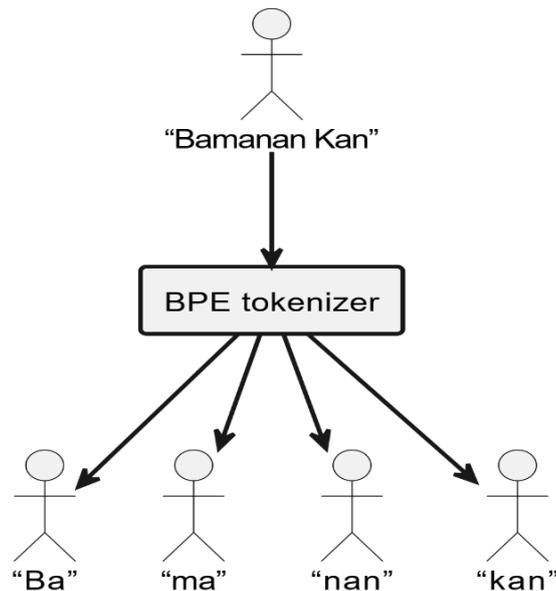


Рис. 1. Токенизатор BPE бамбара

параметры обучения и обработки. Обучение BPE начинается с подсчета уникального набора слов, используемых в корпусе (после завершения этапов нормализации и предварительной токенизации), а затем создается словарь, в котором регистрируются все символы, используемые для написания этих слов.

Пример: изучаю : ['изуч', 'аю'].

3. Алгоритм кодирования пар байтов

Кодирование пар байтов (BPE) изначально было разработано как алгоритм сжатия текстов, а затем использовалось OpenAI для токенизации при предварительной подготовке модели GPT. Оно используется во многих моделях Transformer, включая GPT, GPT-2, RoBERTa, BART и DeBERTa.

Математическая формулировка: Пусть дан корпус текстов $D = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, где s_i — последовательность символов. Алгоритм BPE строит словарь V и последовательность слияний M , минимизируя общее количество токенов при сохранении лингвистической значимости.

Шаг 1: Инициализация и предварительная обработка

```
# Алгоритм 1. Инициализация словаря
V0 = {c ∈ Σ | ∃ s ∈ D : c появляется в s} ∪ {<unk>, <pad>, <s>, </s>}
T = [tokenize_char(s) для каждого s ∈ D]
Где tokenize_char(s) = [c1, c2, ..., cn] для s = "c1c2...cn"
```

Начальная токенизация на уровне символов обеспечивает полное покрытие морфемного пространства языка. Это гарантирует, что даже OOV (out-of-vocabulary) токены могут быть обработаны через декомпозицию на атомарные единицы. Пространства и знаки препинания сохраняются как отдельные токены для поддержания синтаксической структуры.

Шаг 2: Анализ частоты биграмм

```
F = defaultdict(int)
for t ∈ T:
    for i ∈ range(0, len(t) - 1):
        bigram = (t[i], t[i+1])
        F[bigram] += 1
```

Частотное распределение биграмм F отражает морфофонологические закономерности языка. Для агглютинативных языков (бамбара) частые биграммы соответствуют последовательностям морфем, тогда как для флективных языков (русский) они захватывают корневые морфемы и флективные окончания.

Шаг 3: Итеративный процесс слияния

```

Для k = 1 до K :
  (p, q) = argmax_{(x, y) ∈ dom(F)} F [(x, y)]
  если F[(p,q)] < θ: выход из цикла
  T = apply_merge (T, p, q)
  V = V ∪ {p ∘ q}
  M = M ∘ [(p, q)]
  F = recalculate_frequencies(T)

```

Этот процесс имитирует естественное изучение языка, при котором часто встречающиеся комбинации фонем постепенно абстрагируются в морфемы. Каждая итерация повышает уровень абстракции токенов, отражая иерархическую структуру языка.

Шаг 4: Критерии останова и завершения

Формальные условия останова:

Достижение максимального числа слияний: $k = K$ (в нашем случае $K = 80$)

Статистическая значимость $\forall (x, y) \in \text{dom}(F) : F[(x, y)] < 2$.

Порог эффективности: $\frac{\Delta_{\text{compression}}}{\Delta_k} < \varepsilon$.

Критерии основаны на теории информации (Shannon, 1948) и принципе минимальной длины описания (Rissanen, 1978), уравнивая сложность модели и эффективность представления.

Шаг 5: Кодирование новых текстов

```

def encode_text (text, merges_list) :
  tokens = character_tokenize(text)
  for merge in merges_list:
    tokens = apply_single_merge (tokens, merge)
  return tokens

```

Последовательное применение слияний гарантирует идемпотентность процесса токенизации. Неизвестные символы обрабатываются с помощью специального токена <unk>, что обеспечивает надежность алгоритма.

Алгоритм естественным образом адаптируется к структуре каждого языка. Для агглютинативных языков, таких как бамбара, он фиксирует последовательности морфем. Для флективных языков, таких как русский, он определяет корни и окончания.

4. Оценка результатов

Различные метрики рассчитываются по стандартизированным формулам для более точного сравнения. Размер словарного запаса соответствует количеству уникальных токенов, сгенерированных ВРЕ. Среднее количество токенов и символов в предложении представляет собой простые средние арифметические по всему корпусу.

Коэффициент сжатия, четко указывающий на эффективность, представляет собой среднее количество символов на токен, рассчитываемое как отношение количества символов в предложении к количеству токенов в предложении. Результаты, полученные в ходе анализа, представлены в табл. 2.

Оценка результатов

Метрика	Бамбара	Русский	Разница
Размер словарного запаса	41	74	33
Количество слияний	18	45	27
Токены/фраза (в среднем)	6,25	6,83	0,58
Символы/фраза (в среднем)	9,35	11,50	2,15
Коэффициент сжатия	1,50	1,68	0,19

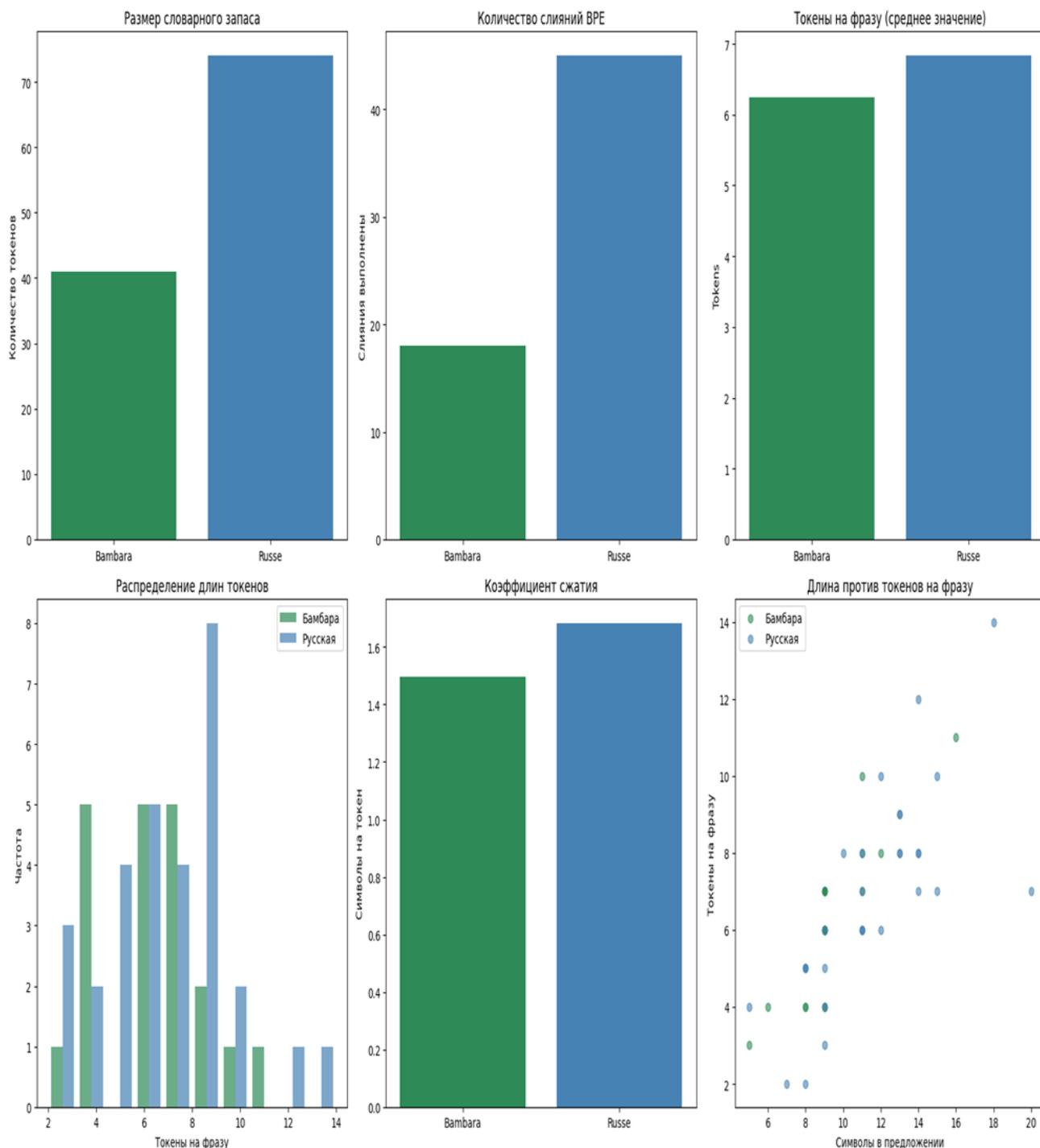


Рис. 2. Сравнительная визуализация

5. Интерпретация результатов

Результаты анализа показывают, что русский язык требует на 80 % больше токенов для покрытия своей сложности, а слияния в русском языке встречаются в 2 раза чаще. Также отмечается явное преимущество языка бамбара, который сжимается в 12 раз эффективнее и содержит меньше токенов (41) по сравнению с русским языком (74).

Заключение

Бамбара обеспечивает лучшую компрессию, русский язык с его флексией требует обширного словарного запаса и полезен для приложений с ограниченными ресурсами. Эти результаты свидетельствуют в пользу адаптации параметров BPE по языковым семьям, что позволяет оптимизировать вычислительную эффективность. Такой подход открывает путь к более справедливому NLP, уважающему языковое разнообразие мира.

Литература

1. Theoretical Analysis of Byte-Pair Encoding. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/2411.08671>
2. Efficient Russian Language Modeling Through Mixture of Experts Architecture. – Режим доступа: <https://arxiv.org/html/2506.09440v1>
3. Impact of Tokenization on LLaMa Russian Adaptation. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/2312.02598>
4. Tokenization Byte-Pair Encoding. – Режим доступа: <https://huggingface.co/learn/llm-course/ru/chapter6/5>
5. Adaptive BPE Tokenization for Enhanced Vocabulary Adaptation in Finetuning Pretrained Language Models. – Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/2410.03258>
6. Byte Pair Encoding (BPE) Algorithm. – Режим доступа: <https://arxiv.com/courses/how-to-build-a-large-language-model/chapter-5-tokenization-large-vocabularies/byte-pair-encoding-bpe>

ВНЕДРЕНИЕ ГЕНЕРАТИВНОГО ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ШКОЛАХ РЕСПУБЛИКИ ТЫВА: ОПЫТ РЕАЛИЗАЦИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

А. А. Донгак, Ч. М. Монгуш

Тувинский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается внедрение генеративного искусственного интеллекта в образовательный процесс. Представлен опыт реализации проекта по формированию нового поколения учителей Республики Тыва, обладающих необходимыми компетенциями для эффективного и этичного использования ИИ в профессиональной деятельности. Описывается разработанная комплексная программа подготовки учителей, дается содержание электронного образовательного курса. В заключении приведены предварительные результаты и обозначены перспективы дальнейшего развития.

Ключевые слова: генеративный искусственный интеллект, образование, школьное образование, Республика Тыва, цифровая трансформация, педагогические компетенции.

Введение

На настоящий момент внедрение искусственного интеллекта (ИИ) в образование, по сравнению с другими сферами, находится на начальной стадии. Тем не менее, внедрение происходит быстрыми темпами, охватывая как высшее, так и общее образование, с целью автоматизации рутинных задач, персонализации обучения и создания цифровых учебных материалов. С 2019 года в Российской Федерации реализуется Национальная программа «Цифровая экономика Российской Федерации», предполагающая ускоренное внедрение цифровых технологий в экономической и социальной сферах. В рамках программы «Цифровая экономика РФ» Указом Президента РФ от 10.10.2019 N 490 (ред. от 15.02.2024) «О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации» утверждена Национальная стратегия развития искусственного интеллекта на период до 2030 года. В стратегии рассматривается повышение уровня квалифицированных кадров и устранение дефицита кадров в области технологий ИИ путем внедрения образовательных моделей на всех уровнях образования, увеличения числа конкурсов и олимпиад, повышения уровня математического и естественнонаучного образования в рамках основных и дополнительных образовательных программ [5, 7].

Выделяют 7 направлений ИИ в образовании:

- 1) распространение технологий адаптивного обучения;
- 2) распространение геймификации на основе ИИ;
- 3) внедрение интеллектуальной робототехники в образовательные процессы;
- 4) включение изучения ИИ в образовательные программы;
- 5) использование ИИ в микро- и нанообучении в корпоративном образовании;
- 6) использование генеративного ИИ в образовании;
- 7) распространение ИИ на платформах массовых открытых онлайн курсов.

В настоящей статье рассмотрим внедрение генеративного искусственного интеллекта в образовательный процесс.

Генеративный искусственный интеллект в образовании

Генеративный искусственный интеллект (ГИИ) — один из типов ИИ, который на основе больших массивов данных способен генерировать новый контент, например, текст, музыку, аудио, изображение и т.д. ГИИ можно представить как «способного ученика», который

прочитал все книги, статьи, форумы, переписки, всю текстовую информацию в библиотеке, в интернете. Далее он анализирует, находит закономерности и на основе полученных знаний ГИИ создает что-то новое. Наиболее известные ГИИ — это большие языковые модели (БЯМ) ChatGPT, Gemini, GigaChat, Яндекс GPT; системы генерации изображений MidJourney, Kandinsky и др [1].

ГИИ применяются в самых разных сферах. Например, в маркетинге ГИИ может написать рекламный слоган, яркие, запоминающиеся тексты, которые можно использовать в социальных сетях, сценарии рекламных роликов, а также может провести анализ ваших конкурентов и придумает стратегию для дальнейшего развития. В медицине по перечисленным симптомам ГИИ поставит предварительный диагноз и порекомендует инструкцию для лечения. Однако, как врач ГИИ не принимает решение и ответственность. Юристы могут использовать ГИИ для составления юридических документов, подготовки к судебным процессам и анализа судебных дел. В управлении персоналом ГИИ поможет проанализировать резюме и порекомендовать подходящих соискателей, основываясь на заданных критериях [4].

Все чаще ГИИ находят широкое применение в образовании. ГИИ помогает сделать процесс обучения более персонализированным и эффективным, а также оптимизировать работу преподавателей, освободив их от рутинных задач. Он помогает учителям: определять цели и задачи обучения согласно рабочей программе дисциплины; формулировать результаты обучения в соответствии с компетенциями, которые должна сформировать дисциплина; определить глобальные цели курса и конкретные задачи для каждого занятия, необходимые для достижения этих целей и формирования нужных навыков; создать план всего курса или отдельных занятий; определить какой материал подходит для конкретной аудитории (текст, видео и т.д.); разработать план занятия, описать сценарий и структурировать контент под каждое занятие; разработать оценочные материалы (создание тестов, заданий с критериями оценивания и других инструментов для проверки усвоения материала); анализировать письменные работы студентов, искать ошибки и формировать развернутую обратную связь; определять слабые и сильные стороны, а также адаптировать учебные материалы для повышения эффективности обучения [2].

Вместе с тем применение ГИИ в системе образовании может потенциально создать определенные угрозы и вызовы:

- качество и достоверность данных: если модель была обучена на некачественных, недостоверных данных, то она может выдавать неадекватные ответы. Иногда модели могут не отличать правду от вымысла. Поэтому важно перепроверять информацию из надежных источников;
- этика, правовые и нормативные вопросы: не стоит доверять БЯМ личную или конфиденциальную информацию. Проблема авторства при использовании ГИИ остается открытым;
- недостаточная глубина знаний: БЯМ знает обо всем понемногу, но поверхностно;
- предвзятость: БЯМ учится на открытых данных и может унаследовать предубеждения. Это может привести к выдаче предвзятой информации;
- снижение когнитивных способностей: бесконтрольное использование ГИИ в решении учебных задач может уменьшить когнитивную нагрузку на учащихся, что потенциально может ухудшить критическое мышление и аналитические навыки;
- уровень подготовки преподавателей: низкая цифровая грамотность педагогов, неравенство в цифровом развитии систем образования, опасения учителей на предмет перспективы замены учителей умными электронными наставниками тормозит внедрение технологий искусственного интеллекта [3].

Выше перечислены основные проблемы, которые могут встретиться при внедрении ГИИ в образовательный процесс. Вместе с тем отказ от внедрения ГИИ в образовательный процесс приведет к существенному технологическому отставанию и обеднению образовательного контента и инструментов. На данный момент не разработано нормативно-правовое регули-

рование использования технологий ИИ в сфере науки, системе образования и организации рынка труда, но в будущем оно не должно влиять на темпы внедрения инструментов ИИ. Необходимо также понимать, что учителя останутся важным элементом образовательного процесса, но их работа станет более эффективной благодаря автоматизированным инструментам. В будущем преподаватели будут не только передавать знания ученикам, но и будут играть роль наставника. Они будут помогать ученикам строить индивидуальные образовательные маршруты в соответствии с их интересами и карьерными целями. Преподаватели сфокусируются на развитии критического мышления, коммуникационных навыков и креативности учеников. Поскольку рутинные задачи, такие как проверка тестов или предоставление базовой информации, будут частично автоматизированы, учителя смогут уделять больше внимания развитию у учеников навыков, которые трудно заменить алгоритмами [6].

Опыт внедрения генеративного ИИ в школах Республики Тыва (на примере Тоджинского кожууна)

В рамках реализации проекта «Учителя нового поколения: внедрение генеративного искусственного интеллекта в школах Республики Тыва», поддержанного грантом Главы Республики Тыва, с сентября 2025 года начата активная работа. Проект направлен на формирование нового поколения учителей Республики Тыва, обладающих необходимыми компетенциями для эффективного и этичного использования ИИ в профессиональной деятельности. Особенно важно для отдаленных кожуунов Республики Тыва, где наблюдается дефицит квалифицированных кадров и ограниченный доступ к современным образовательным ресурсам. Внедрение генеративного ИИ позволит новому поколению учителей этих районов повысить качество образования, несмотря на существующие ограничения.

Для достижения цели проекта разработана комплексная программа подготовки учителей. Был создан электронный образовательный ресурс (дистанционный курс), который включает три основных раздела: теоретические основы ГИИ в образовании, его преимущества и недостатки; этические и правовые аспекты применения ГИИ в образовании; инструменты для создания учебных материалов, автоматизации проверки заданий и персонализации обучения. Кроме того, курс содержит практические рекомендации по составлению эффективных запросов (промтов) с примерами и методические указания по интеграции ГИИ в учебный процесс, разработке заданий с учетом возможностей ГИИ.

Для учителей и сотрудников образовательных организаций Тоджинского кожууна Республики Тыва был проведен бесплатный курс повышения квалификации. Форма обучения была очно-заочной. В заочной части слушатели занимались в вышеуказанном дистанционном курсе. Приняли участие более 70 учителей и сотрудников образовательных учреждений. После прохождения курса получены следующие предварительные результаты. Входное анкетирование показало, что большинство слушателей (50,7 %) относятся к возрастной группе 31–45 лет, а 35,8 % — к 46–60 годам. Анализ стартовых позиций выявил преимущественно положительное отношение к ИИ: 74 % опрошенных уже использовали различные ИИ-сервисы в работе (онлайн-переводчики, генераторы изображений, презентаций), остальные 26 % были незнакомы с ними. Также отмечено широкое использование ИИ в личной жизни (голосовые помощники, навигаторы, рекомендательные системы). Примечательно, что 100 % участников выразили высокую заинтересованность в изучении и применении технологий генеративного искусственного интеллекта. Однако, большинство опрошенных не обладали знаниями по правильной формулировке промтов, этическим рамкам использования ИИ в образовании и ограничениям использования ГИИ. По завершении курса все слушатели выразили полное удовлетворение полученными знаниями и практическими навыками, подтвердив намерение применять их в своей работе.

Заключение

В дальнейшем проект предполагает расширение охвата и обучение учителей других отделенных кожуунов Республики Тыва. Ожидается, что данная инициатива окажет существенное влияние на развитие региональной системы образования, способствуя повышению качества обучения и подготовке школьников к жизни в цифровом мире.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Главы Республики Тыва для молодых ученых, проект «Учителя нового поколения: внедрение генеративного искусственного интеллекта в школах Республики Тыва».

Литература

1. *Витвицкая А. А.* Генеративный искусственный интеллект как ресурс инновационного образования / А. А. Витвицкая // Современные проблемы науки и образования. – 2024. – № 3. – С. 2–5.
2. Генеративный искусственный интеллект в образовании: анализ тенденций и перспективы / Е. А. Поспелова, П. Л. Отоцкий, Е. Н. горлачева, Р. В. Файзуллин // Профессиональное образование и рынок труда. – 2024. – № 3. – С. 6–21.
3. *Григорьев С. Г.* Повышение эффективности применения технологий генеративного искусственного интеллекта в образовательной деятельности / С. Г. Григорьев // Информатика и образование. – 2024. – № 39(3). – С. 5–15.
4. *Корж Н. В.* Применение искусственного интеллекта в образовательном процессе: взгляды молодежи / Н. В. Корж, В. Н. Супиков // КиберЛенинка. – 2024. – № 1. – С. 4–6. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-iskusstvennogo-intellekta-v-obrazovatelnom-protsesse-vzglyady-molodezhi/viewer> (дата обращения: 25.11.2025).
5. Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций Российской Федерации: официальный сайт. – Москва. – URL: <https://digital.gov.ru/target/naczionalnaya-programma-cifrovaya-ekonomika-rossijskoj-federaczii> (дата обращения: 24.11.2025)
6. *Павел В. С.* Использование технологий искусственного интеллекта в обучении иностранному языку: тематика методических работ за 2023 год и перспективы дальнейших исследований / В. С. Павел // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Общественный науки. – 2024. – № 8. – С. 3–4.
7. Цифровая экономика: официальный сайт. – Москва. – URL: <https://d-economy.ru/analitic/vlijanie-ii-na-obrazovanie/> (дата обращения: 24.11.2025)

ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Ю. В. Дудина

Тульский государственный университет

Аннотация. В статье обосновывается применение цифрового кода и средств визуализации для облегчения усваивания студентами дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», а также необходимость владения данными цифровыми компетенциями не только студентами ИТ-направлений. Также в работе приводится пример решения статистической задачи определения выборочного коэффициента корреляции и уравнения прямой регрессии с визуализацией полученных результатов с помощью языка программирования R и их анализом.

Ключевые слова: цифровые компетенции, теория вероятностей, математическая статистика, анализ данных, код, визуализация.

Введение

Актуальность использования цифровых технологий в образовании сегодня сложно переоценить. Это не просто модное дополнение, а необходимость, продиктованная требованиями современного мира. В эпоху цифровизации не только студенты и преподаватели ИТ-направлений должны обладать цифровыми компетенциями, но и инженерных, экономических, медицинских и гуманитарных направлений [1, 2], в учебные планы которых включены дисциплины по изучению информационных технологий, используемых в профессиональной области, или по основам программирования и анализа данных.

Плацдармом для получения цифровых компетенций является изучение фундаментальных математических дисциплин, в частности, теории вероятности и математической статистики [3].

Математическая статистика оперирует абстрактными понятиями: распределение, доверительный интервал, p -значение, центральная предельная теорема, а также обладает набором сложных для вычисления формул. Цифровые инструменты, используемые при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», например, языки программирования R, Python, статистические пакеты Matrixer и SPSS, электронные таблицы Excel, позволяют облегчить понимание курса за счет визуализации, создания интерактивных графиков. Основные статистические программы, предназначенные для обработки и анализа данных, рассмотрены в работах [4–6], где также дано обоснование необходимости использования данных программ при подготовке и проведении занятий по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Понимание основ статистики и умение работать с цифровой информацией достаточно важно для любой современной профессии, а также для бытовой грамотности, так, например, для критической оценки новостей, основанных на статистике.

Основная часть

Поэтому представляется целесообразным использование языков программирования и статистических пакетов в процессе преподавания теории вероятности и математической статистики. Так, при чтении лекций или на практических занятиях возможен вывод на экран проектора результата решения задачи, интерактивного графика. Студенты могут своими глазами увидеть, как меняется форма распределения при изменении параметров, как объем выборки влияет на доверительный интервал, как работает метод Монте-Карло. При этом студент не

обязан владеть навыками написания сложного кода, так как задачи математической статистики отличаются от анализа данных. Анализ данных — это более широкая дисциплина, которая использует статистику как ключевой, но не единственный инструмент. Для самостоятельного решения студентами задач математической статистики достаточно подготовить методические указания с примерами решения задач с помощью языков программирования и познакомить студентами с основными библиотеками и функциями.

Рассмотрим применение языка программирования R для решения задач математической статистики. R — это язык программирования и среда для статистических вычислений и построения графиков, ключевыми особенностями которого являются мощные возможности для визуализации, огромное количество пакетов для статистики, а также бесплатная основа использования.

Студентам предлагается решить, например, следующую задачу:

Сырье, поступающее на завод из карьера, содержит два полезных компонента — минералы А и Б. Результаты анализа десяти образцов сырья, поступающего в разное время из разных мест карьера, приведены в табл. 1, где X и Y — соответственно процентное содержание минералов А и Б в образцах. Найти выборочный коэффициент корреляции и уравнения прямой регрессий Y на X. Проверить адекватность полученных моделей с уровнем значимости 0,05.

Таблица 1

Результаты анализа образцов

X	67	54	72	64	39	22	58	43	46	34
Y	24	15	23	19	16	11	20	16	17	13

Решение в среде RStudio:

```
x <- c(67, 54, 72, 64, 39, 22, 58, 43, 46, 34)
y <- c(23, 15, 23, 19, 16, 11, 20, 16, 17, 13)
model_1 <- lm(y ~ x)
summary(model_1)
```

Call:

```
lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:

```
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.2521 -0.4109  0.4351  0.7656  1.7289
```

Coefficients:

```
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.71172     1.70257   3.355 0.010009 *
x             0.23223     0.03266   7.110 0.000101 ***
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Residual standard error: 1.558 on 8 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8634, Adjusted R-squared: 0.8463

F-statistic: 50.56 on 1 and 8 DF, p-value: 0.0001009

Анализируем полученные данные: р-значение для F-статистики равняется 0.0001009, что меньше 0.05, значит, модель не является бессмысленной и объясняет более 86 % дисперсии (Multiple R-squared: 0.8634).

Для свободного члена и углового коэффициента при переменной X р-значение меньше 0.05, следовательно, мы должны отклонить нулевую гипотезу о равенстве нулю этих коэффи-

циентов. Оценка свободного члена равна 5,71172, а углового коэффициента 0,23223. Также, при необходимости, можно добавить код для вывода уравнения прямой регрессии.

Далее делаем визуализацию с доверительными интервалами (рис. 1):

```
library(ggplot2)
data = data.frame(x = x, y = y)
ggplot(data, aes(x = x, y = y)) +
  geom_point() +
  geom_smooth(method = "lm") +
  labs(title = "Линия регрессии с ggplot2",
        x = "Процентное содержание минерала А",
        y = "Процентное содержание минерала Б")
```

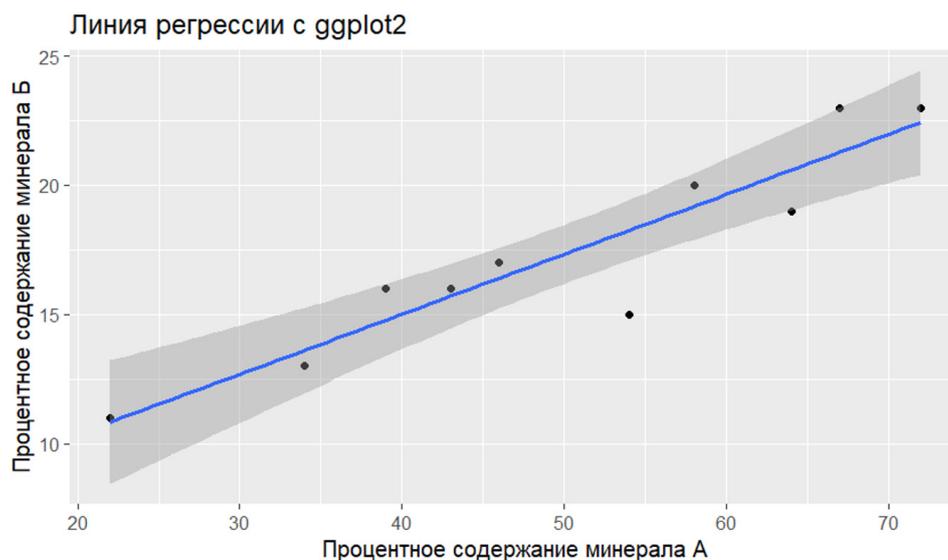


Рис. 1. Уравнения прямой регрессии с доверительными интервалами

Заключение

Таким образом, применение цифровых технологий освобождает студентов от громоздких ручных вычислений и делает акцент на интерпретации полученных данных. Внедрение цифровых технологий в преподавание теории вероятности и математической статистики позволяет сделать переход от теоретического, абстрактного курса к практическому, наглядному, интерпретирующему курсу, который развивает критическое статистическое мышление и дает прямые, востребованные на рынке навыки работы с данными. Цифровые технологии превращают статистику из пугающего набора формул в мощный и понятный инструмент для познания и анализа окружающего мира.

Литература

1. Коломиец Т. С. Применение проектных технологий в вузах для формирования у студентов профессиональных навыков и компетенций / Т. С. Коломиец, О. О. Князева // Гуманитарные, социально-экономические и общественные науки. – 2025. – № 6. – С. 48–52.
2. Сорокина Г. П. Внедрение цифровых компетенций в образовательные программы высшего образования в России / Г. П. Сорокина, Т. А. Першина, Е. А. Долгих // Вестник университета. – 2022. – № 5. – С. 61–70.
3. Внедрение цифровых технологий в образовательный процесс при изучении теории вероятностей и математической статистики / Л. А. Белая, О. В. Боницкая, Ю. В. Дудина, О. В. Ин-

ченко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 года / Воронежский государственный университет. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2023. – С. 1282–1285.

4. Кошкарова Т. А. Некоторые аспекты применения программного обеспечения при преподавании математической статистики в вузе / Т. А. Кошкарова // Актуальные проблемы современного образования. – 2021. – № 2(31). – С. 304–312.

5. Будникова И. К. Информационные технологии при изучении дисциплины «теория вероятностей и математическая статистика» / И. К. Будникова // Приборостроение и автоматизированный электропривод в топливно-энергетическом комплексе и жилищно-коммунальном хозяйстве: Материалы VIII Национальной научно-практической конференции, Казань, 08–09 декабря 2022 года. – Казань : Казанский государственный энергетический университет, 2023. – С. 477–480.

6. Ярных Ю. А. Анализ программного обеспечения для подготовки и проведения занятий по теории вероятностей и математической статистике / Ю. А. Ярных // Наука, техника, педагогика в высшей школе: материалы всероссийской научно-практической конференции, Москва, 20–27 февраля 2023 года. – Москва : Московский политех, 2023. – С. 385–392.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ВЕДУЩИХ РОССИЙСКИХ ВУЗОВ И ИХ ЗАРУБЕЖНЫХ АНАЛОГОВ

Т. В. Ермакова

Калининградский государственный технический университет

Аннотация. В данной статье проведен сравнительный анализ вступительных экзаменов по математике в ведущих российских вузах и их зарубежных аналогах. Анализ основан на данных за 2020–2024 годы, включает форматы экзаменов, охват тем, уровень сложности и влияние на подготовку студентов. Приведены подробные описания и конкретные примеры заданий для иллюстрации различий.

Ключевые слова: вступительные испытания, математика, типовые задачи, олимпиады, тестирование, технический вуз, точные науки.

Введение

Анализ заданий вступительных испытаний по математике имеет несколько ключевых аспектов, которые подчеркивают его важность как для образовательной системы, так и для подготовки квалифицированных специалистов. А именно:

1. Выявление особенностей заданий

Исследование различных типов заданий (например, тестовые, открытые, задачи на доказательство) и их структуры (количество вопросов, время на выполнение). Анализ тем и разделов математики, представленных в заданиях, а также их соответствие современным образовательным стандартам. Оценка сложности заданий и их адекватности для целевой аудитории (абитуриенты).

2. Сравнение заданий

Сравнение российских и зарубежных систем: выявление различий в подходах к формированию экзаменационных заданий в России и за рубежом, включая сильные и слабые стороны каждой системы. Изучение изменений в заданиях за последние годы для понимания актуальных требований к абитуриентам и тенденций в области образования.

3. Разработка рекомендаций

Предложение рекомендаций для образовательных учреждений по улучшению формата и содержанию экзаменационных заданий, а также рекомендаций по адаптации учебных программ к требованиям экзаменов, чтобы лучше подготовить студентов к вступительным испытаниям.

Цель настоящей статьи — выявить особенности, преимущества и недостатки систем вступительных испытаний по математике, используемых в России и за рубежом, а также предложить рекомендации для гармонизации подходов в контексте глобализации образования.

1. Особенности вступительных испытаний по математике в российских вузах

В России система вступительных экзаменов по математике претерпела значительные изменения после введения ЕГЭ в 2009 году. Однако ведущие вузы часто дополняют или заменяют ЕГЭ собственными экзаменами, чтобы обеспечить более глубокий отбор. Это отражает традицию российской высшей школы, где математика рассматривается как дисциплина, требующая строгих доказательств и глубокого понимания.

Единый государственный экзамен по математике профильного уровня включает 19 заданий и состоит из двух частей: 12 заданий базового и среднего уровней (короткие ответы) и 7

высокого (расчеты и доказательства); время, отводимое на выполнение заданий, составляет 3 часа 55 минут; максимальная оценка 100 баллов. Экзамен ориентирован на школьную программу и охватывает ее основные разделы: алгебра, геометрия, тригонометрия, элементарные функции, производные, интегралы, комбинаторика, теория вероятностей.

Примеры типовых заданий профильного ЕГЭ по математике:

1. (базовый уровень)

Задача № 1. Решить уравнение: $\log_3(77 - x) = \log_{27}(64)$.

В данной задаче требуется знать только основные свойства логарифма для перехода к одному основанию, с последующим приравнением выражений под знаком логарифма обеих частей равенства.

Задача № 2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle C = 120^\circ$. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке K , лежащей на стороне AD , $CK = 3\sqrt{3}$. Найдите диагональ AC параллелограмма.

В данной задаче нужно применить только основные свойства параллелограмма

2. (высокий уровень)

Задача № 1. Решить неравенство:

$$\frac{360 - 28 \cdot 36^x - 66 \cdot 6^x}{36^x - 7 \cdot 6^x + 12} \leq 36^x + 2 \cdot 6^{x+1} + 30.$$

В данной задаче уже требуются более глубокие знания свойств показательной функции, преобразований показательных и дробно-рациональных выражений.

Задача № 2.

Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , а BH — высота этого треугольника.

А) Докажите, что биссектриса угла B является также биссектрисой угла OBH ;

Б) Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle ABC = 90^\circ$, высота $BH = \frac{120}{13}$, биссектриса $BL = \frac{120\sqrt{2}}{17}$.

В данной задаче необходимы хорошие знания свойств вписанной и описанной окружности, свойств и основных соотношений для треугольника, умение рассуждать, обосновывать и доказывать.

Приведенные примеры показывают, как ЕГЭ переходит от задач с простыми вычислениями к задачам, требующим достаточно глубоких знаний школьной программы по математике и навыков логического мышления.

Дополнительные экзамены ведущих вузов

Ведущие вузы России, такие, как, МГУ, МФТИ, СПбГУ, проводят и собственный письменный экзамен по математике для факультетов механики, математики и физики. Формат экзамена предполагает 4–7 задач повышенной сложности, включая знание доказательств теорем и решение задач с элементами высшей математики. Задания в основном олимпиадного уровня, на выполнение отводится 4 часа, максимальная оценка 100 баллов, проходной балл — 50+.

Примеры типовых заданий из дополнительных вступительных испытаний МГУ

Задача № 1 (2023 год)

Последовательность действительных чисел определяется равенством

$$a_n = (1 + \sqrt{n}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \right). \text{ Найдите } a_{2023}.$$

Решение

$$a_n = (1 + \sqrt{n}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \right) = (1 + \sqrt{n}) \cdot \left((\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \right) = n - 1 \Rightarrow a_{2023} = 2022$$

Задача № 2

Найдите все пары действительных чисел, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{xy} = 2\sqrt{2 - \sqrt{xy}} \cdot \sqrt[4]{xy}.$$

Решение

Для левой части: $\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2xy}} \geq 2.$

Для правой части: $2\sqrt{2 - \sqrt{xy}} \cdot \sqrt[4]{xy} = 2\sqrt{2\sqrt{xy} - xy} = 2\sqrt{1 - (1 - \sqrt{xy})^2} \leq 2.$

Таким образом, исходное уравнение имеет место только при $x = y = 1$, $x = y = -1$.

Как видим, в приведенных заданиях требуется иметь достаточно широкую математическую эрудицию и умение применить школьные знания к нестандартным задачам олимпиадного уровня.

2. Вступительные испытания в зарубежных вузах

За рубежом экзамены более разнообразны, часто интегрированы в национальные системы. В основном, они ориентированы на прикладное мышление и креативность.

Например, в Великобритании используется система A-levels, MAT (Mathematics Admissions Test), STEP (Sixth Term Examination Paper). Уровень A-levels состоит из двух экзаменов — чистая математика и механика/статистика. Математическая часть включает, в частности, задачи на доказательства, вычисление интегралов, решение дифференциальных уравнений, векторную алгебру. Для поступления на некоторые программы в области математики и компьютерных наук в Оксфордский и Кембриджский университеты требуется сдача экзамена уровня MAT, который проверяет не только глубину знаний, но и логику, оригинальность мышления. Экзамен MAT с 2024 года проводится в цифровом формате и состоит из 27 вопросов (задач), 25 из которых — задания с выбором ответа, и 2 задания, в которых необходимо представить развернутое решение. На выполнение заданий отводится 2,5 часа; максимальная итоговая оценка 100 баллов. Задания включают задачи по математическому анализу, алгебре, геометрии, теории вероятностей и математической логике.

Примеры типовых заданий из экзамена MAT (2024 год)

Задача № 1 (с выбором ответа)

Чему равняется сумма всех положительных целых чисел, меньших, чем 3^{10} , и не являющихся степенью числа 3? (4 балла)

a) $\frac{(3^{10} - 1)^2}{2}$ b) $\frac{(3^{11} - 1)^2}{2}$ c) $\frac{3(3^{10} - 1)^2}{2}$ d) $(3^{10} - 1)^2$ e) $(3^{11} - 1)^2$.

Решение

Верный ответ а).

Так как сумма всех положительных целых чисел до 3^{10} является геометрической прогрессией, нетрудно вычислить искомую сумму как разность

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 3^{10}) - (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10}) = \frac{(3^{10} - 1)^2}{2}.$$

Задача № 2 (с развернутым решением)

Пусть (x, y) — вектор, координаты которого являются целыми числами, и нет такого вектора (x, y) , который мог бы быть записан в виде $a \cdot (5, 0) + b \cdot (0, 7) + c \cdot (2, 1)$, где $a, b, c \geq 0$ и целые.

1. (3 балла). Пусть S — множество векторов (p, q) , где $0 \leq p \leq 4$, $0 \leq q \leq 6$ и целые.

а) сколько векторов в S ?

б) поясните, почему для любого вектора (x, y) с целыми координатами мы можем найти целые положительные числа a, b и вектор $v \in S$ (который будем называть остатком) такие, что $(x, y) = a \cdot (5, 0) + b \cdot (0, 7) + v$.

Покажите, что вектор $v \in S$ определяется однозначно для каждого вектора (x, y) .

2. (4 балла). Пусть даны векторы $(x, y) + k \cdot (2, 1)$ и $(x, y) + m \cdot (2, 1)$, где k, m — целые.

а) докажите, что эти векторы имеют один и тот же остаток, если $(k - m)$ делится на 35.

б) поясните, почему векторы $(x, y) - (2, 1)$, $(x, y) - 2 \cdot (2, 1)$, ..., $(x, y) - 34 \cdot (2, 1)$ имеют разные остатки.

3. (4 балла). Покажите, что если $x \geq 68$, $y \geq 34$ и целые, то вектор (x, y) может быть записан в виде $a \cdot (5, 0) + b \cdot (0, 7) + c \cdot (2, 1)$, где $a, b, c \geq 0$ и целые.

4. (4 балла). Студент предполагает, что если x, y целые, положительные и $x + y \geq 102$, то вектор (x, y) может быть записан в виде $a \cdot (5, 0) + b \cdot (0, 7) + c \cdot (2, 1)$, где $a, b, c \geq 0$ и целые. Верно ли это предположение?

Как видим из приведенных примеров, как тестовая (с выбором ответа), так и практическая (с развернутым решением) части этого экзамена предполагают умение использовать знания из различных разделов математики при решении задач нестандартного типа, а не только базовые школьные навыки.

Заключение

В рамках проведенного сравнительного анализа вступительных испытаний по математике в ведущих российских вузах и их зарубежных аналогах были выявлены существенные различия в подходах к оценке знаний абитуриентов, что отражает более широкие тенденции в образовательных системах. Ведущие российские вузы традиционно используют результаты централизованного экзамена в форме ЕГЭ по профильной математике и дополнительные вступительные испытания (ДВИ), которые акцентируют внимание на глубине теоретических знаний, решении сложных задач и алгоритмических навыках. Эти экзамены часто включают элементы олимпиадной математики, что способствует выявлению талантов среди школьников, но может ограничивать доступность для тех, кто не специализируется в предмете с ранних лет.

Зарубежные аналоги демонстрируют больший акцент на прикладных аспектах математики, интеграции с другими дисциплинами и развитии критического мышления, что делает зарубежные системы более гибкими и ориентированными на практическое применение знаний.

Основные выводы:

1) российская модель экзаменов способствует формированию сильной математической базы среди элиты, но может способствовать неравенству в доступе к образованию, поскольку успех сильно зависит от подготовки в специализированных школах или участия в олимпиадах;

2) зарубежные системы лучше адаптированы к глобальным вызовам, таким, как изменяющиеся требования рынка труда, цифровизация и межкультурное сотрудничество.

На основе проведенного анализа можно предложить следующие рекомендации:

1) введение элементов прикладной математики в ДВИ поможет сделать экзамены более релевантными для современных профессий.

2) развитие онлайн-платформ для подготовки к ДВИ могло бы снизить барьеры доступа и способствовать более справедливому отбору.

В перспективе, с учетом глобализации образования и влияния технологий, таких, как искусственный интеллект, вступительные испытания по математике, вероятно, перейдут к гибридным моделям, сочетающим теоретическую глубину с практической ориентацией. Это позволит не только сохранять традиции, но и адаптироваться к изменяющимся требованиям общества.

Литература

1. Math Admissions Test. Mathematical Institute: official site. URL: <https://www.maths.ox.ac.uk/study-here/undergraduate-study/maths-admissions-test> (дата обращения 25.11.25).
2. Центральная приемная комиссия МГУ имени М. В. Ломоносова: сайт. Москва. URL: <https://срк.msu.ru/entrance/> (дата обращения 24.11.25)
3. Приемная комиссия МФТИ. сайт. Московская область, г. Долгопрудный. URL: <https://рк.mipt.ru/bachelor/exams/> (дата обращения 24.11.25)
4. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»: сайт. Москва. URL: <https://fipi.ru/ege/otkrytyu-bank-zadaniy-ege> (дата обращения 20.11.25)

МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ В ШКОЛЕ БЫТЬ

Я. М. Ерусалимский, И. А. Шкурай

Южный федеральный университет

Аннотация. Рассмотрены вопросы включения в школьную математику элементов математического моделирования. Изложен авторский подход к необходимости и возможности решения поставленной проблемы, состоящий в замене линии «Задачи на составление уравнений» на линию «Математическое моделирование». В качестве примера как это можно сделать — рассмотрено две простые задачи, одна из которых традиционно рассматривается как задача на составление уравнений, а другая относится к классу задач на математическое моделирование.

Ключевые слова: математическое моделирование, задачи на составление уравнений, школьная математика.

Введение

Истоками зарождения математического моделирования, вероятно, следует считать механику. Постепенно класс задач, относимых к математическому моделированию, расширялся, как расширялся и класс математических моделей. Математическое моделирование во второй половине XX века стали рассматривать как отдельную отрасль прикладной математики [1].

На официальном уровне признанием этого является и появление отдельной научной специальности ВАК РФ 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». В учебных планах направления подготовки «Прикладная математика и информатика» появились новые учебные дисциплины «Математическое моделирование», «Математические модели естественных наук», в ведущих университетах России открыты соответствующие кафедры [1].

Авторы полагают, что и на уровне школьного математического образования следует уделить математическому моделированию отдельное внимание.

Кажется, что сделать это сложно, поскольку это приведет к дальнейшему увеличению объема школьного курса математики, а это не представляется возможным. Значит нужно искать возможности для включения элементов математического моделирования в школьную математику, не увеличивая объем курса математики.

Мы считаем, что это можно и необходимо сделать, правильно расставив акценты и внося некоторые методические изменения при изучении линии, которая традиционно называется «Задачи на составление уравнений», чтобы она приобрела новое название и содержание «Задачи на математическое моделирование». Наш подход к этому подробно изложен в [2, 3].

Две задачи о движении навстречу

В настоящее время большинство задач на составление уравнений не содержат этапов составления модели и исследования модели как таковой, а предполагает работу с готовой моделью (из физики, экономики, механики). Приведем пример подобной задачи.

Задача 1. Из пунктов А и Б в 9 часов утра отправились навстречу друг другу по шоссе велосипедист и мотоциклист. Велосипедист движется со скоростью 30 км/час, а мотоциклист со скоростью 60 км/час. В котором часу они встретятся, если расстояние между А и Б по этому шоссе 180 км?

Приведем решение этой задачи как задачи на составление уравнений.

Решение задачи 1

Обозначим через x неизвестное время, прошедшее до встречи, тогда путь, пройденный велосипедистом до встречи равен $30 \cdot x$, а мотоциклистом — $60 \cdot x$, учитывая, что они встретились, получаем уравнение $30 \cdot x + 60 \cdot x = 180$ или $90 \cdot x = 180$, т. е. $x = 2$. Значит встреча состоялась в 11 часов утра.

Покажем, как можно трактовать эту задачу как задачу на математическое моделирование.

Обозначим скорости велосипедиста и мотоциклиста $v_{вел}$, $v_{мот}$ соответственно, время, прошедшее до встречи — $t_{встр}$, а расстояние между А и Б — через S . Путь, пройденный велосипедистом до встречи равен $v_{вел} \cdot t_{встр}$, а мотоциклистом — $v_{мот} \cdot t_{встр}$. Учитывая встречу велосипедиста и мотоциклиста, мы получаем равенство $v_{вел} \cdot t_{встр} + v_{мот} \cdot t_{встр} = S$ или

$$S = (v_{вел} + v_{мот}) \cdot t_{встр}. \quad (1)$$

Последнее можно рассматривать как математическую модель рассматриваемой задачи о встрече. Какие конкретные задачи она позволяет решать:

1. Нахождения времени прошедшего до встречи, если известны скорости и расстояние —

$$t_{встр} = \frac{S}{v_{вел} + v_{мот}}. \quad (2)$$

2. Нахождение расстояния между пунктами, если известны скорости и время до встречи —

$$S = (v_{вел} + v_{мот}) \cdot t_{встр}. \quad (3)$$

3. Нахождение суммы скоростей участников движения, если известно расстояние между пунктами и время до встречи —

$$v_{вел} + v_{мот} = \frac{S}{t_{встр}}. \quad (4)$$

4. Нахождение скорости одного из участников движения, если известно расстояние между пунктами, время до встречи и скорость другого участника движения —

$$v_{вел} = \frac{S}{t_{встр}} - v_{мот} \quad \text{или} \quad v_{мот} = \frac{S}{t_{встр}} - v_{вел}. \quad (5)$$

Математическая модель позволяет решать и задачи, в которых практически ничего неизвестно. Вернемся к исходной задаче и переформулируем её в задачу 2

Задача 2. Из пунктов А и Б в 9 часов утра должны были отправиться навстречу друг другу с постоянными скоростями по шоссе велосипедист и мотоциклист. Их встреча должна была состояться в 11 часов утра. Из-за ремонтных работ шоссе было закрыто для движения, и они были направлены навстречу друг другу по объездной дороге, которая в 1,5 раза длиннее, чем дорога по шоссе, а её качество таково, что мотоциклист и велосипедист движутся по ней со скоростью, равной $\frac{3}{4}$ своей скорости движения по шоссе. В котором часу состоится встреча мотоциклиста и велосипедиста?

Решение задачи 2

Как видим, в этой формулировке почти ничего не дано (кроме времени планировавшейся встречи при движении по шоссе). Однако, использование математической модели, позволяет легко решить задачу. Действительно,

$$t_{встр1} = \frac{S_1}{v_{вел1} + v_{мот1}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot S}{\frac{3}{4} v_{вел} + \frac{3}{4} v_{мот}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot S}{3 \cdot 2 \cdot (v_{вел} + v_{мот})} = 2 \cdot \left(\frac{S}{v_{вел} + v_{мот}} \right) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ясно, что их встреча состоится в 13 часов (в час дня).

Как решать эту задачу, не используя работу с математической моделью, мы не знаем.

Приведем пример ещё двух задач, решение которых как задач на составление уравнений очень сложно, и просто, если к ним подходить как к задачам на математическое моделирование.

Задача 3. Для рытья котлована решено использовать совместно два экскаватора. Однако, в процессе работы возникла необходимость проведения профилактических работ на первом из экскаваторов, в результате чего он простоял 10 часов. Это привело к тому, что рытье котлована продолжалось на 3 часа больше планового времени. На сколько часов больше продолжалось бы рытье котлована, если бы на 10-часовую профилактику поставили бы не первый экскаватор, а второй?

Задача 4. Два мотоциклиста движутся с постоянной скоростью (каждый со своей). Они живут в пунктах А и Б. Если они в 9 часов утра выедут по шоссе на встречу друг с другом, то их встреча состоится в 12 часов дня. Однако, первый из них перепутал время старта и выехал в 8 часов утра. В результате их встреча состоялась в 11 часов 20 минут. На следующий день первый проспал и выехал в 10 часов утра. В котором часу теперь состоится их встреча?

Заключение

Что необходимо для внедрения элементов математического моделирования в школьную математику. Нам представляется, что для этого необходимо проделать следующее:

- Тщательно поработать с существующими наборами задач по теме «Задачи на составление уравнений», уменьшив в нем количество задач типа «**Задача 1**», и полнить этот набор задачами типа «**Задача 2**». В настоящее время задачи типа «**Задача 2**» представляют собой почти пустое множество.

- Провести повышение квалификации школьных учителей по программе «Математическое моделирование в школе», а также внести соответствующие коррективы в курс методики преподавания математики в школе для студентов педагогических отделений вузов.

Авторы полагают, что учебное пособие [2] может послужить основой для небольшого курса повышения квалификации учителей «Элементы математического моделирования в школьной математики. Содержание и методика».

Литература

1. Ерусалимский Я. М. К истории математического моделирования в Южном федеральном университете / Я. М. Ерусалимский, И. А. Шкурай // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. Науки. – 2024. – № 1(224). – С. 4–16.

2. Ерусалимский Я. М. Математическое моделирование в школе / Я. М. Ерусалимский, И. А. Шкурай // Ростов-на-Дону; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2025. – 63 с.

3. Ерусалимский Я. М. Эта «простая», «красивая» и полезная математика / Я. М. Ерусалимский, Г. Р. Малонек // Южный федеральный университет. 4-е изд., исправл. и дополн. – Ростов-на-Дону; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2024. – 330 с.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В МАТРИЧНЫХ ИГРАХ: ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Е. В. Кондрашова

Национальный исследовательский московский государственный строительный университет

Аннотация. При изучении теории игр и применении теории вероятностей студенты часто сталкиваются с рядом сложностей. Эти трудности могут быть связаны как с пониманием основных терминов теории вероятности, так и недостаточным охватом теоретической базы в учебных планах. Часто дисциплины, заменяющие основные разделы теории вероятностей, носят прикладной характер и не уделяют должного внимания базовой теории. В данной статье рассматриваются основные элементы теории вероятностей, используемые при решении матричных игр, а также пути преодоления сложностей в применении аппарата теории вероятностей, возникающих у студентов, изучающих дисциплину теории игр. Материал работы направлен на улучшение образовательного процесса в области теории игр, способствуя более глубокому пониманию теоретических и практических аспектов, связанных с использованием вероятностного аппарата.

Ключевые слова: обучение теории игр, элементы теории вероятностей в теории игр, смешанные стратегии, матричные игры, игры с природой.

Введение

Теория вероятностей и математическая статистика, наряду с теорией игр, представляют собой математические дисциплины, активно применяемые в процессе принятия решений. Источники указывают, что к XVII–XVIII векам теория вероятностей сформировалась как самостоятельная научная область [1, 2]. Тем не менее, принимая во внимание разнообразие подходов к хронологии развития этих математических направлений, можно утверждать, что истоки данной отрасли математического знания прослеживаются за несколько веков до нашей эры [3].

Теория игр — относительно молодая научная область, формирование которой связано с эпохой Второй мировой войны [4]. Существенным шагом в её развитии стало появление в 1944 году монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», которая вывела эту дисциплину на новый уровень и показала возможности её применения в самых разных сферах: от военных задач и психологии до медицины, экономических моделей, политики, социологии и др. Важный вклад в развитие теории внес также Джон Нэш: его работы по равновесию расширили представления о стратегическом взаимодействии участников конкуренции [5].

Аппарат теории игр предлагает анализ ситуаций, в которых участники принимают решения и стремятся максимизировать свои выигрыши, учитывая возможные действия других игроков [6]. Эта теоретическая рамка позволяет моделировать сложные экономические и социальные взаимодействия, исследовать оптимальные стратегии и предсказать результаты в условиях неопределенности.

Учитывая сложившуюся междисциплинарность [7], возникающую в различных задачах теории принятия решений, появляется необходимость применения аппарата фундаментальной теории вероятностей, что часто не всегда удается студентам и вызывает ряд сложностей.

Так как дисциплина теории игр преимущественно преподается студентам экономического профиля подготовки, часто раздел теории вероятностей ими усвоен лишь частично, а эконометрические дисциплины, входящие в профиль подготовки и часто заменяющие основные

разделы теории вероятностей, более носят прикладной характер и не уделяют должного внимания базовой теории.

Главной задачей данной работы является выделение ключевых наиболее часто используемых элементов раздела теории вероятностей, применяемых при решении матричных игр.

1. Теоретические аспекты

Теория игр является математическим методом изучения оптимальных стратегий в играх. Она позволяет анализировать ситуации, в которых участники принимают решения, исходя из ожиданий относительно действий других игроков, что делает её полезной в различных областях. Следует отметить, что согласно последним исследованиям, теория игр занимает важное место как в использовании в задачах искусственного интеллекта, так и кибернетики [8]. Это связано с тем, что теория игр предлагает математический подход изучения оптимальных стратегий (методов поведения) в ситуациях, в которых участвует несколько сторон, преследующих различные интересы [9].

Используя формулировку дисциплин относящимся к теории принятия решения, можно сказать, что игра представляет собой математическую модель конфликтной ситуации. Неотъемлемыми компонентами любой игры следует считать: наличие игроков (два и более), наличие стратегий у игроков (все возможные варианты поведения в игре), правило, по которому определяется выигрыш/проигрыш игрока (используя математическую формулировку, функция выигрыша).

Игры имеют классификацию по различным критериям: количеству игроков, вариантам действия и взаимосвязанности поведения участников и др. [10]. Каждый класс игр использует свой математический аппарат и метод решения.

Матричные игры обычно характеризуются как антагонистические, подразумевая, что участниками игры являются два игрока-антагониста и выигрыш одного равен проигрышу другого. Решение в данных играх проводится с использованием аппарата теории вероятностей. Поиск минимаксных и максиминных стратегий, как оптимальных, в матричных играх обычно не вызывает сложностей у студентов. Однако часто в игре отсутствует седловая точка и в этом случае согласно основной теореме теории матричных игр (теореме фон Неймана) решение игры следует искать в смешанных стратегиях.

Понятие смешанных стратегий определяется с использованием терминов теории вероятностей. Так смешанной стратегией игрока A в игре с матрицей $A = \left| a_{ij} \right|_{m \times n}$ называется упорядоченный набор действительных чисел p_i , $i = \overline{1, m}$, удовлетворяющих условиям $p_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$; $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Числа интерпретируются как вероятности, с которыми игрок A выбирает свою стратегию под номером i . Аналогично вводится понятие смешанных стратегий игрока B , которые определяются как набор чисел, q_j , $j = \overline{1, n}$, удовлетворяющих условиям $q_j \geq 0$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$; $\sum_{j=1}^n q_j = 1$. Следует отметить, что при таком определении чистые стратегии являются частным случаем смешанных стратегий. В случае наличия чистой стратегии у игрока A один из элементов p_i принимает значение равное одному, в то время как остальные элементы равны нулю. Аналогично определяется чистая стратегия игрока B : один из элементов q_j принимает значение равное одному, в то время как остальные элементы равны нулю.

Если игрок A применяет смешанную стратегию $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, а игрок B смешанную стратегию $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, то математическое ожидание выигрыша игрока A (проигрыша игрока B) определяется соотношением $F(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$. Если игра повторяется многократно, то средний выигрыш близок к математическому ожиданию. Из определений видно, что понятие смешанных стратегий базируется на определении вероятности, в то время как средний ожидаемый выигрыш связан с определением математического ожидания.

Таким образом до введения понятий смешанных стратегий в дисциплине теории игр студентам необходимо представить основные понятия, на которых базируется определение стратегий. Учитывая, что определение вероятности многообразно: начиная от классического, аксиоматического и геометрического и заканчивая определением вероятности как философской категории, — достаточным будет ввести классическое определение вероятности, базируемое на понятии симметричного пространства. Далее в разделе дисциплины понятие математического ожидания, используемое в теории игр основано на определении математического ожидания дискретной случайной величины, которое также использует классическое понятие вероятности.

Для полноценного восприятия понятий матричных игр и решения задач, необходимым является владение следующими понятиями теории вероятностей, которые должны быть введены до введения понятий смешанных стратегий и среднего ожидаемого выигрыша/проигрыша игроков. К таким понятиям (определениям) следует отнести: понятия элементарного исхода и пространства элементарных исходов/событий, случайного события, аксиоматического подхода к определению вероятности, когда последняя задается перечислением её свойств. Также необходимым является определение простейшего пространства элементарных исходов, являющегося классической моделью, в которой пространство конечно и все исходы эксперимента равновозможны, взаимно несовместны и образуют полную группу событий. Данная теоретическая база позволяет полноценно ввести классическое определение вероятности.

При решении задач на поиск смешанных стратегий студенты должны руководствоваться основными свойствами вероятностей (в частности, проверять содержатся ли полученные значения в допустимом диапазоне между нулем и единицей и выполнены ли условия нормировки).

Обычно под полным решением игры понимается нахождение смешанных стратегий обоих игроков и цены игры. Для нахождения цены игры необходимо руководствоваться формулой математического ожидания дискретной случайной величины (с размерностью равной двум). Таким образом, студенты хорошо должны ориентироваться и в определении математического ожидания дискретной случайной величины.

Одним из разделов, представляющих особый интерес при изучении матричных игр, является «Игры с природой». Фактически так называемая игра с природой задается как матричная игра двух игроков. Однако результат игры важен только для первого игрока, который обычно позиционируется как лицо, принимающее решение и желающие получить конкретный результат (прибыль, выигрыш и т. д.) Второй же игрок не заинтересован в результате игры, однако также обладает рядом стратегий. При этом нельзя рассматривать действия второго игрока как действующего разумно, так как выбор им стратегий непредсказуем и результат игры для него не имеет значения. Обычно первый игрок называется статистиком, второй — природой. Учитывая, что результат важен лишь для первого игрока, обычно решение приводится относительно его матрицы игры и стратегий.

Известно, что в играх с природой используется несколько критериев нахождения оптимальных стратегий: критерий Вальда, Гурвица, Сэвиджа, Лапласа, Байеса [12–14]. Обычно для итогового принятия решения по оптимальным стратегиям рассматриваются решения, полученные по всем известным критериям. Важно заметить, что критерии Лапласа и Байеса используют понятия теории вероятностей и математической статистики. Критерий Байеса применяется в том случае, если известны состояния природы. Фактически имеется в виду, что известны вероятности, с которыми второй игрок придерживается той или иной своей стратегии. В некоторых прикладных задачах действительно рассматривается в качестве второго игрока природа [15].

Вероятности, в которых может оказаться «природа», могут быть получены различными способами. Для того, чтобы студенты могли усвоить получение данных по вероятностным

элементам задачи необходимо осветить часть разделов математической статистики. В частности, понятие относительной частоты, основные элементы теории оценок [16].

Таким образом вероятности состояний природы могут быть получены по выборочным данным, представленным в виде вариационной ряда в дискретной форме с указанием значений признака и соответствующего ему значения относительной частоты, интерпретируемой как вероятность.

2. Прикладные аспекты

Приведем пример задачи, разработанной студентами в период обучения и ознакомления с материалом. Студентам предлагалось составить свои формулировки задач и провести решение по темам матричных игр и игр с природой для проверки понимания материала. Составление примеров позволяет показать слабые стороны при усвоении материала. Так, например, в некоторых случаях учащиеся не выписывают полное решение игры, что является неполным решением задачи.

2.1. Задача «Игра с природой»

Формулировка задачи, представленная студентами, дается ниже.

Пароход «Горизонт» осуществляет прогулки по Москве-реке каждую весну и лето. В условиях теплой погоды компания выпускает и продает 30 детских билетов и 165 взрослых, а при прохладной — 15 детских и 140 взрослых. На случай повышенного спроса компания может продать еще 3 детских билета и 7 взрослых. Стоимость детского билета составляет 950 рублей, взрослого — 1390. Во время экскурсии пассажиров угощают бокалом шампанского, стоимость которого составляет 150 рублей, детям дают пачку яблочного сока стоимостью 30 рублей. Определить оптимальную стратегию компании.

Представим решение, приведенной к данной задаче.

1. У компании есть две стратегии:

- 1) A_1 — выпустить 30 детских и 165 взрослых билетов;
- 2) A_2 — выпустить 15 детских и 140 взрослых билетов.

У природы есть два состояния:

- 1) Π_1 — теплая погода;
- 2) Π_2 — прохладная погода.

2. Если фирма выберет стратегию A_1 и погода будет теплая (Π_1), тогда доход компании составит: $30 \times (950 - 30) + 165 \times (1390 - 150) = 27600 + 204600 = 232200$ рублей.

Если фирма выберет стратегию A_1 и погода окажется прохладной (Π_2), тогда компания получит: $15 \times (950 - 30) + 140 \times (1390 - 150) = 187400$ рублей. Но она потеряла: $15 \times 30 + 25 \times 150 = 825$.

Доход компании составит: $187400 - 825 = 186575$ рублей.

Если фирма выберет стратегию A_2 и погода будет теплая (Π_1), тогда доход компании составит: $15 \times (950 - 30) + 140 \times (1390 - 150) + 3 \times 950 + 7 \times 1390 = 190980$ рублей.

Если фирма выберет стратегию A_2 и погода окажется прохладной (Π_2), тогда доход компании составит: $15 \times (950 - 30) + 140 \times (1390 - 150) = 187400$ рублей.

3. На основе расчетов составим платежную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 232200 & 186575 \\ 190980 & 187400 \end{pmatrix}.$$

4. В игре сознательно действует один игрок (компания). Второй игрок (природа) не заинтересован в результате.

Для принятия решения есть несколько критериев: критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица и критерий Байеса.

1) Для нахождения оптимальной стратегии воспользуемся критерием Вальда.

Игрок считает, что второй игрок пойдет по наихудшему для него пути. Поэтому необходимо выбрать максимально возможные варианты при самом худшем исходе: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$, $\alpha = \max_i(186575, 187400) = 187400$.

Наилучшая стратегия по Вальду — стратегия A_2 .

2) Найдем стратегию по критерию Сэвиджа.

По этому критерию должна быть составлена матрица рисков: $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 825 \\ 41220 & 0 \end{pmatrix}$$

В качестве критерия рассматривается $S = \min_i \max_j a_{ij} = \min_i(825, 41220) = 825$.

Наилучшая стратегия по Сэвиджу — стратегия A_1 .

3) Воспользуемся критерием Гурвица.

За оптимальную принимается стратегия, которая удовлетворяет условию:

$$H = \max_i \left\{ \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \right\}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$h_i = \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}.$$

Пусть доля оптимизма и пессимизма равны, то есть $\lambda = 0.5$. Тогда:

$$h_1 = 0,5 \times (232200 + 186575) = 209387,5$$

$$h_2 = 0,5 \times (190980 + 187400) = 18190$$

$$H = \max_i \{209387,5; 18190\}.$$

Оптимальная стратегия по Гурвицу — стратегия A_1 .

4) Критерий Байеса

Наилучшей стратегией считается та, которая максимизирует математическое ожидание выигрыша:

$$\bar{a} = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j, \quad i = \overline{1, m}.$$

Пусть q_j равно 0,5 для всех значений P_j . Тогда:

$$a_1 = 232200 \times 0,5 + 186575 \times 0,5 = 209387,5$$

$$a_2 = 190980 \times 0,5 + 187400 \times 0,5 = 18190$$

Наилучшая стратегия по критерию Байеса — A_1 .

По трем критериям из четырех наилучшей стратегией была стратегия A_1 . Таким образом, стратегия A_1 является оптимальной.

По представлению формулировки и решения данной задачи необходимо выделить некоторые моменты. Во-первых, при решении и составлении матрицы игры учащиеся делают ошибки при подсчете прибыли/дохода игрока. Не всегда студенты представляют лаконичную и экономически верную формулировку задачи.

При поиске решения необходимо уделять внимание возможным арифметическим ошибкам при составлении матрицы рисков, верному написанию математической формулировки критериев для дальнейшего математического подсчета. При использовании критерия Байеса учащиеся должны давать обоснование представленным в условии вероятностям состояний

природы: каким образом они были/могли быть получены, учитывая, что данные вероятности не являются экспертными оценками.

По приведенным примерам можно отметить основные, не совсем удовлетворительные моменты, возникающие при решении задач. Не смотря на понимание материала в общем возникают, как неточности и сложности в экономической интерпретации игры, так и отсутствие структуры решения и должного оформления теоретического обоснования решения, в частности структуры решения матричной игры с использованием необходимого и достаточного условия существования седловой точки (решения в чистых стратегиях), так и использования основной теоремы теории матричных игр (теоремы фон Неймана) в случае поиска решений в смешанных стратегиях.

Заключение

В данной статье описаны основные аспекты применения теории вероятностей в контексте матричных игр и трудности, с которыми сталкиваются студенты при изучении этой дисциплины. Как показывает практика знание базовых понятий в области теории вероятностей влияет на успешность решения задач, связанных с матричными играми. Анализ ошибок при решении задач студентами показывает недостаточное усвоение основных понятий теории вероятностей. Например, студенты могут путать различные понятия теории вероятностей, что приводит к неверному решению задач, что согласуется с исследованиями [17] и [18], авторы которых отмечают, что к базовым понятиям вероятностной теории при обучении студентов необходимо относиться с повышенным вниманием. Следует отметить, что дальнейшие исследования могут быть сосредоточены на других типах игр (позиционных, биматричных, кооперативных), алгоритмическом решении игр, используемых в области искусственного интеллекта [19].

Возможные ограничения исследования связаны с недостатком данных и выборкой студентов, участвовавших в исследовании, что может повлиять на обобщаемость результатов. Исследования других групп студентов в различных контекстах, например, технических или гуманитарных направлениях, могут дать более полное представление о сложностях, с которыми сталкиваются обучающиеся. Полученные результаты подчеркивают необходимость уделить особое внимание включения теоретических аспектов вероятностей в образовательные программы и оптимальную для изучения последовательность подачи теоретического материала и решения задач.

Литература

1. Сигаева В. В., Пономарев В. А. Исторический аспект развития теории вероятностей и математической статистики // Теория и практика современной науки. – 2020. – № 3(57). – С. 218–221.
2. Баранец Н. Г., Верёвкин А. Б. Теория вероятностей в религиозно-доктринальных спорах математиков // Христианское чтение. – 2020. – № 1. – С. 109–118.
3. Локоть Н. В., Фроленко Д. М. К вопросу о периодизациях становления и развития теории вероятностей и статистики // Таврический обозреватель. – 2016. – № 6(11). – С. 124–127.
4. Айматова Ф. Х., Отакулов Э. Ш. Применение теории игр для решения некоторых задач в экономике // Проблемы современной науки и образования. – 2021. – № 12. – С. 5–9.
5. Вильданова Г. А. Теоретико-игровой подход к исследованию коммуникации // Вестник ПНИПУ. Проблемы языкознания и педагогики. – 2017. – № 3. – С. 59–67.
6. Грицова О. А., Носырева А. Н., Михайлова О. М. Применение теории игр в управлении персоналом // Региональные проблемы преобразования экономики. – 2019. – № 10. – С. 263–268. DOI: 10.26726/1812-7096-2019-10-263-268.

7. Hanley John. GAMES, game theory and artificial intelligence. T. 14 Dec 2021, Vol. 5, Issue 2, pages 114 – 130. ISSN: 23996439. DOI: 10.1108/JDAL-10-2021-0011
8. Aya Aljaradat, Gargi Sarkar, Sandeep K. Shukla. Modelling cybersecurity impacts on digital payment adoption: A game theoretic approach. Journal of Economic Criminology. Volume 5, September 2024, 100089 <https://doi.org/10.1016/j.jeconc.2024.100089>
9. Buddhadeb Pradhan, Veena Goswami, Rabindra K. Barik, Sudipta Sahana. An integrated strategy-based game-theoretic model and decentralized queueing system for mobile multi-robot task coordination. Decision Analytics Journal. Volume 7, June 2023, 100254. <https://doi.org/10.1016/j.dajour.2023.100254>
10. Hanyu Li, Wenhan Huang, Zhijian Duan, David Henry Mguni, Kun Shao, Jun Wang, Xiaotie Deng. A survey on algorithms for Nash equilibria in finite normal-form games. Computer Science Review. Volume 51, February 2024, 100613. <https://doi.org/10.1016/j.cosrev.2023.100613>
11. Лабскер Л. Г. О некоторой общей схеме формирования критериев оптимальности в играх с природой // Вестник ФА. – 2000. – № 2. – С. 61–78.
12. Голдуева В. А., Мокшанина М. А. Принятие решений в условиях неопределенности на основе игр с природой // Вестник Пензенского государственного университета. – 2020. – № 4(32). – С. 130–140.
13. Чернов В. Г. Игра с «природой» с параметрами в виде нечетких вербальных оценок // International Journal of Humanities and Natural Sciences. – 2020. – Vol. 11-3(50). – С. 201–210.
14. Муратова Л. И., Сагадеева Э. Ф. Критерии игр с природой в сфере аграрного производства // Международный научный журнал «Символ науки». – 2016. – № 1. – С. 155– 156.
15. Chong Jackie, Sin Cheong, Kathiarayan Vijayakumaran. The Role of Artificial Intelligence in Strategic Decision-Making Opportunities, Challenges, and Implications for Managers in the Digital Age. – 2023.
16. Zhou X., Yang Z., Hyman M. R., Li G., Munim Z. H. Guest editorial: Impact of artificial intelligence on business strategy in emerging markets: a conceptual framework and future research directions // International Journal of Emerging Markets. – 2022. – Vol. 17, No 4. – P. 917–929. <https://doi.org/10.1108/IJOEM-04-2022-995>
17. Горелик В. А., Золотова Т. В. Использование статистических оценок в игре с природой как модели инвестирования // Статистика и математические методы в экономике. – 2020. – Т. 17, № 6. – С. 64–71. DOI: 10.21686/2500-3925-2020-6-64-72.
18. Astuti D., Anggraeni L., Setyawan F. Mathematical probability: student's misconception in higher education // Journal of Physics. 2020. DOI: 10.1088/1742-6596/1613/1/012009.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И МЕТОДОВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

В. А. Липинская

Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета

Аннотация. В статье рассматривается внедрение цифровых технологий в образовательный процесс, с акцентом на проект «Цифровая образовательная среда» в России. Подчёркивается важность трансформации традиционного обучения, особенно в области математики и геометрии, где визуализация играет ключевую роль. Доклад акцентирует внимание на сложностях, связанных с изучением объёмов многогранников и тел вращения, и предлагает использовать современные цифровые инструменты, такие как Geogebra и Wordwall, для улучшения наглядности и интерактивности уроков. Эти технологии позволяют учащимся лучше осваивать сложные геометрические концепции, создавая динамичные и доступные учебные материалы.

Ключевые слова: образовательный процесс, цифровые технологии, математика, тела вращения, наглядность, интерактивность, Geogebra, Wordwall, Цифровая образовательная среда, геометрия, цифровые инструменты.

Введение

В современном мире цифровые технологии стали неотъемлемой частью нашей жизни, проникнув во все её сферы, включая образование. Федеральный проект «Цифровая образовательная среда», стартовавший в России в 2019 году [4], нацелен на активное внедрение цифровых инструментов в учебный процесс. Это не просто переход на дистанционное обучение, а глубокая трансформация традиционного образования, которая подразумевает использование интерактивного оборудования, специализированного программного обеспечения и цифровых платформ прямо в классе.

Математика, будучи одной из фундаментальных наук, часто вызывает трудности у учащихся [5]. Особенно это касается геометрии, где требуется развитое пространственное и образное мышление. Тема «Объёмы многогранников и тел вращения» является одной из таких сложных, но важных тем. Успех её изучения во многом зависит от наглядности и способности учащихся представить себе объёмные объекты.

Данный доклад посвящён тому, как современные цифровые технологии и методы визуализации могут сделать процесс изучения геометрии, в частности тел вращения, более динамичным, наглядным и эффективным.

1. Использование цифровых технологий в образовании

Важно понимать, что цифровизация образования — это не синоним дистанционного обучения. Дистанционное обучение — это формат проведения занятий, когда учитель и ученик взаимодействуют онлайн.

Цифровизация же — это более широкое понятие. Она подразумевает интеграцию цифровых инструментов в обычный, очный учебный процесс. К таким инструментам относятся:

Интерактивное оборудование: проекторы, интерактивные доски, планшеты, VR-очки [1].

Цифровые платформы и программное обеспечение: онлайн-конструкторы заданий, программы для построения графиков и 3D-моделей.

Организационные ресурсы: электронные журналы и дневники.

Использование этих ресурсов позволяет повысить интерес учащихся, сделать уроки более разнообразными и вовлекающими, а также развить у студентов навыки самооценки и рефлексии.

Геометрия — это наука, которую невозможно полноценно освоить без чёткого визуального представления. Многие учащиеся испытывают трудности с мысленным воссозданием трёхмерных фигур, видением их скрытых граней и пониманием того, как плоская фигура, вращаясь, образует объёмное тело [3].

Традиционно для этого используются плакаты и материальные модели. Однако они не всегда доступны, а их арсенал ограничен. Цифровые технологии снимают эти ограничения, предоставляя учителю и ученикам бесконечные возможности для создания и взаимодействия с геометрическими объектами [2].

2. Виды цифровых инструментов, который можно использовать на уроках математики

Рассмотрим конкретные цифровые инструменты, которые можно эффективно использовать при изучении тел вращения и многогранников.

Одним из самых мощных и доступных инструментов является бесплатное онлайн-приложение Geogebra (<https://www.geogebra.org/>).

Что это? Это динамическая математическая среда, которая объединяет геометрию, алгебру и математический анализ.

Как использовать? На уроках по теме «Тела вращения» с помощью Geogebra можно:

1. Строить трёхмерные модели цилиндра, конуса, шара и усечённого конуса.
2. Вращать созданные модели. Учащиеся могут рассмотреть тело со всех сторон, увидеть не только видимые, но и скрытые элементы, что невозможно при работе со статичным изображением в учебнике.
3. Создавать анимацию. Например, можно показать, как прямоугольник, вращаясь вокруг одной из своих сторон, превращается в цилиндр. Это наглядно демонстрирует саму суть понятия «тело вращения».
4. Изменять параметры фигур (например, радиус основания или высоту) и в реальном времени наблюдать, как меняется объём тела [5].

Использование Geogebra превращает абстрактные геометрические понятия в зримые и интерактивные объекты, что значительно облегчает их понимание и запоминание.

После объяснения теоретического материала и наглядной демонстрации фигур важно отработать и закрепить полученные знания. Здесь на помощь приходят интерактивные платформы, например, Wordwall (<https://wordwall.net/ru>).

Что это? Онлайн-сервис, предоставляющий множество шаблонов для создания обучающих игр и заданий.

Как использовать? Для закрепления темы «Объёмы» можно создать:

1. Викторину. Учащимся предлагается вопрос с несколькими вариантами ответов (например, «По какой формуле рассчитывается объём конуса?»). Платформа автоматически проверяет ответ и показывает результат, что позволяет студенту сразу увидеть свои ошибки.
2. Задание на сопоставление. Необходимо «перетащить» (принцип drag&drop) формулу объёма к соответствующей ей геометрической фигуре (например, соотнести пирамиду, цилиндр и шар с их формулами). Такие задания помогают надёжно закрепить связь между внешним видом тела и способом вычисления его объёма.

Подобные интерактивные задания не только делают процесс обучения более увлекательным, но и экономят время преподавателя на проверке, позволяя уделить больше внимания индивидуальной работе с учащимися.

Заключение

Внедрение цифровых технологий в процесс обучения математике – это не дань моде, а необходимость, продиктованная временем [2]. Использование инструментов визуализации, таких как Geogebra, и интерактивных платформ, таких как Wordwall, позволяет решить несколько ключевых педагогических задач:

1. Повысить наглядность и сделать абстрактные геометрические понятия понятными и доступными.

2. Развить пространственное мышление учащихся, позволяя им интерактивно взаимодействовать с моделями.

3. Повысить учебную мотивацию и интерес к предмету, превращая изучение сложной темы в увлекательный процесс.

Таким образом, грамотное и систематическое использование цифровых ресурсов на уроках математики способствует не только улучшению академических результатов, но и формированию у студентов целостного и глубокого понимания геометрии, что является важной составляющей их общего интеллектуального развития.

Литература

1. *Калитин С. В.* Интерактивная доска. Практика эффективного применения в школах, колледжах и вузах: Учебное пособие. – М. : Солон-Пресс, 2013. – 192 с.

2. *Блинов В. И., Сергеев И. С., Есенина Е. Ю.* Основные идеи дидактической концепции цифрового профессионального образования и обучения. – М., 2019. – 24 с.

3. *Сухорукова Д. С.* Роль математики в современном мире // Научный журнал молодых ученых. – 2020. – №202. – С. 256–258.

4. Об утверждении Целевой модели цифровой образовательной среды: Приказ Министерства просвещения РФ от 2 декабря 2019 г. № 649.

5. *Матомедианичева М. М.* Использование цифровых технологий при изучении математики // [Электронный ресурс]. – 2023.

НАПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОДА

Е. А. Немыкина, Е. М. Аристова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрены способы улучшения программного кода при создании программ на различных языках программирования. В частности, утверждается, что внимание следует уделять простоте, отсутствию логических нагромождений, не следует пренебрегать комментированием. Программный код нуждается в проработке и грамотной оптимизации, отслеживании обновлений. Использование встроенных библиотек при создании кода поможет избежать возникновения ошибок, сбоев (так называемых багов) в работе программы.

Ключевые слова: программирование, программный код, чистый код, языки программирования, разделение данных, оптимизация программного кода, встроенные библиотеки методов и классов.

Введение

Программирование — сфера большей частью прикладная, однако практическая составляющая компетенции профессионального программиста неразрывно связана с постоянным обучением, т. е. совершенствованием знания теории программирования, постоянно обновляющейся.

Основой написания эффективной программы, обладающей такими свойствами как производительность, надёжность, быстрота реализации, образующей комфортную электронную среду (на языке программистов — юзабилити), является так называемый хороший, или чистый, код. Кроме качественного обеспечения конечного продукта — программы, хороший код позволяет легко ориентироваться в программных элементах, когда необходимо внести изменения в программу или исправить ошибки.

К проблемам обучения программиста в условиях вузовских курсов можно отнести крайнюю инертность в вопросах актуализации теории соответственно современным требованиям в создании программ. На помощь новичкам приходят различные форумы для программистов, где можно не только узнать о последних обновлениях в области различных языков программирования, но и самому принять участие в обсуждении способов оформления программного кода, получить от опытных программистов ответ на проблемный вопрос, связанный с решением определённой задачи. Большинство из этих вопросов непосредственно апеллирует к созданию хорошего кода. В ходе работы над статьёй была проанализирована информация наиболее популярных программистских сайтов и форумов (blog.rt.ru, gitverse.ru, habr.com, tproger.ru, selectel.ru/blog/, cyberforum.ru, dtf.ru и др.) и составлен перечень советов начинающим программистам о способах улучшения качества программного кода.

1. Деление кода на блоки

Как утверждается, одним из самых распространённых заблуждений новичков в программировании является использование неоправданно объёмных методов и классов, с большим разнообразием логических операций. Громоздкие кодовые блоки рискуют накапливать трудно обнаружимые ошибки. Если в создании программы принимает участие группа разработчиков, то, в случае допущенных ошибок, на их поиск и на то, чтобы разобраться в коде, потребуется длительное время, что значительно замедлит реализацию проекта. Чтобы избежать подобных

задержек в создании программного продукта, можно применить такой способ оптимизации кода, как разделение данных на модули — логические части, в которых каждый блок отвечает за отдельное действие. Результатом будет их относительная независимость и взаимозаменяемость их элементов без ущерба для всей программы. Дальнейшие действия, включающие преобразование компонентов программы, её тестирование, будут значительно облегчены.

Приведу очень простой пример. На вход программе подаётся натуральное число n ($n \geq 2$). Затем поступают n целых чисел. Необходимо написать программу, которая создаёт список чисел, представляющих собой сумму соседних чисел.

Первое решение:

```
[print([lst[i] + lst[i + 1] for i in range(len(lst) - 1)]) for lst in [[int(input()) for i in range(int(input()))]]]
```

Второе решение:

```
seq = []
for _ in range(int(input())):
    seq.append(int(input()))
```

```
res = []
for i in range(len(seq) - 1):
    res.append(seq[i] + seq[i+1])
```

```
print(res)
```

Во втором решении код разбит на блоки, что позволит легче читать его и, в случае необходимости, исправлять. Несмотря на то, что код стал объёмнее, воспринимается он проще и понятнее. В больших проектах это будет играть значимую роль.

2. Соблюдение правил оформления командных строк

Условием создания хорошего кода является соблюдение установленных для данного языка программирования правил оформления, которыми многие нередко пренебрегают, адаптируя код под себя. Правильно оформленный код легко читать, править и, в целом, поддерживать. В каждом языке программирования существуют свои специальные требования к выстраиванию командных строк: определённое количество отступов, наличие или отсутствие пробелов между символами в ряде случаев, регламентация в присваивании названий и т. д. Лучше всего сразу изучить эти рекомендации и следовать им.

Кроме деления данных на модули и оформления их в соответствии с существующими в языке программирования правилами, качеству кода способствует вынесение дублирующего кода в методы и классы. Если в разных частях программы есть повторяющиеся строки кода, то они образуют собой дублирующий код, который в случае изменения части кода с сохранением зависимого от него элемента, провоцирует сбой программы. Поэтому код, содержащий множество фрагментов одинакового кода, сложнее править. Методы и классы, в которые вынесены дублирующиеся строки, позволяют производить правку без того, чтобы полностью переписывать всю программу. Опытные программисты советуют находить дублирующийся код при помощи кода-ревью и (или) специальными инструментами.

Код-ревью представляет собой проверку кода не автором, а соразработчиками проекта. Одновременно с исправлением неточностей синтаксиса языка и логических ошибок происходит обмен знаниями, выдвижение новых идей. Перед отправкой на проверку автор сам отслеживает правильность созданного программного продукта. Затем создаётся Pull Request (запрос на внесение изменений в код проекта и включение этих изменений в основную кодовую базу) или Merge Request (механизм объединения изменений из одной ветки в другую) в систе-

ме контроля версий, добавляется описание изменений и указываются ревьюверы, которые, в свою очередь, проверяют код на корректность, читаемость, соответствие необходимым требованиям. Они оставляют комментарии, уточняют детали, выдвигают предложения по улучшению. После совместного с автором обсуждения в код вносится итоговая правка, он проходит утверждение и становится полноценной частью проекта.

Для кода-ревью используются специализированные инструменты, например, GitHub, GitLab, Bitbucket, Gerrit и Crucible (платформы для создания проектов и проверки кода). Эти инструменты выявляют дублирующийся код, а в ряде случаев производят замену дублей.

Для анализа кода можно применить встраиваемые платформы, автоматизированно осуществляющие проверку на повторяющийся код, например, Sonar Qube.

3. Оптимизация кода

Улучшению кода способствует его грамотная оптимизация, которой всегда пользуются опытные разработчики. Слишком громоздкий код замедляет программные процессы, затрачивает большое количество ресурсов. Оптимизация призвана помочь сократить нерационально объёмные части кода. Однако при преобразовании кода важно достичь баланса, чтобы лучшее не стало врагом хорошего, и оптимизация, напротив, не привела к усложнению программы, когда читаемость и доступность кода были бы затруднены для других программистов, работающих с ним.

Перед тем, как проводить оптимизацию, необходимо оценить структуру кода в целом и по частям с точки зрения его соответствия стандартам и целесообразности правки.

4. Комментирование

Важнейшая составляющая кода — комментарии, без которых в нём трудно будет разобраться, объяснить его логику, найти причины возможных ошибок. Комментарии позволят значительно сэкономить время при работе с кодом.

Без комментариев нельзя обойтись, если метод использует критически важную часть кода, модификация которой не должна проводиться. Цель комментария в данном случае – пресечь это действие.

Иногда в случае применения модификации метода корректность кода может быть нарушена в многопоточной среде, при том, что в однопоточной ошибок не будет. Комментарий предупредит о вероятных сбоях.

5. Использование библиотек

Опытные разработчики советуют при написании кода грамотно использовать библиотеки, в которых предлагаются уже готовые части кода. Начинающие программисты часто пренебрегают библиотеками, поскольку стремятся досконально разобраться в основах программирования, однако самостоятельность часто их подводит. Чтобы избежать распространённых ошибок, можно взять уже разработанные функции, хранящиеся в библиотеках, что позволит сэкономить время и сосредоточиться на других задачах, например, тестировании и отладке программы. При этом надёжнее воспользоваться встроенными, а не сторонними библиотеками, поскольку они изначально содержатся в языках программирования и оптимизированы под их нужды. Несколько разных библиотек могут иметь специфику реализации, без учёта которой будет невозможно добиться корректности работы программы, поэтому главная рекомендация здесь — придерживаться принципа «один код — одна библиотека».

Необходимо отслеживать актуальность библиотек, так как устаревшие версии могут спровоцировать баги и повысить уязвимость программы в целом.

6. Открытый код как возможность повысить квалификацию программиста

Безусловно, для написания хорошего кода особенно ценным является опыт в создании программных продуктов. Чтобы его получить, новичку можно записаться в поддержку проекта Open Source (в переводе — «открытый исходный код»), который в своей основе имеют, например, операционная система Linux со множеством дистрибутивов (Ubuntu, Fedora, Debian), браузер Firefox, платформа для создания сайтов WordPress, веб-сервер Apache HTTP Server. Программы с открытым исходным кодом зарегистрированы под определёнными лицензиями (например, GPL, MIT, Apache), которые регулируют порядок использования, модификации и распространения программного обеспечения.

Открытый исходный код доступен для скачивания и преобразования любым желающим. С его помощью можно улучшать имеющиеся программные продукты или создавать новые с условием, что они будут так же открыты и бесплатны для других пользователей. Часто есть возможность присоединиться и участвовать в уже организованных совместных разработках, имеющих репозитории на каких-либо платформах.

Необходимо учитывать риски работы с открытым исходным кодом: можно столкнуться с проблемами поддержки и обновлений, низким качеством кода и документации, отсутствием гарантий и ответственности, вероятностью заражения вредоносным ПО, регуляторными и лицензионными рисками. В связи с этим стоит проанализировать активность разработки, выражающейся в количестве коммитов (снимков состояния проекта в определённый момент времени, сохранённый в истории репозитория; атомарная единица изменений, содержащая полную информацию о состоянии проекта) за квартал, а также количеством коммиттеров, историю выпуска программного обеспечения, уровень поддержки сообщества и документацию, число компаний и индивидуальных разработчиков, работающих над кодом, модель лицензирования, отчёты о безопасности.

Заключение

Для того чтобы программа успешно функционировала, необходимо тщательно прорабатывать её код. Условиями чистого или хорошего кода являются его разбиение на логические части, краткое, но ёмкое комментирование, грамотное использование встроенной в язык библиотеки, уменьшающей вероятность ошибок в коде. Проверка и оптимизация кода способствуют его эффективности. Хороший код зависит от уровня профессионализма тех, кто его создаёт. Это значит, что он требует не только детального внимания и оттачивания, но и постоянного самосовершенствования компетенций программистов, которые должны всё время быть в курсе происходящих изменений в сфере программирования.

Литература

1. Макконнелл С. Совершенный код. Практическое руководство по разработке программного обеспечения. – Москва : БХВ, 2022. – 896 с.
2. Мартин Р. Чистый код: создание, анализ и рефакторинг. – Санкт-Петербург : Питер, 2019. – 464 с.
3. Паттерны объектно-ориентированного программирования / Э. Гамма, Р. Хелм, Р. Джонсон, Дж. Влссидес. – Санкт-Петербург : Питер, 2025. – 448 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА FP-GROWTH ДЛЯ АНАЛИЗА АССОЦИАТИВНЫХ ПРАВИЛ В ЭЛЕКТРОННОЙ КОММЕРЦИИ

Д. Р. Погорелов

Волгоградский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается задача анализа ассоциативных правил на основе алгоритма FP-Growth [5] для построения системы рекомендаций товаров. Актуальность темы обусловлена необходимостью выявления скрытых закономерностей в транзакционных данных интернет-магазинов и формированием персонализированных рекомендаций для пользователей. Исследуются области применения методов ассоциаций и подходы к адаптации алгоритма FP-Growth для использования в веб-приложениях [8]. Представлены требования к интерфейсу и структуре данных, а также методы обработки CSV-файлов и создания внутреннего FP-дерева. В работе описана реализация алгоритма на JavaScript и тестирование созданной системы рекомендаций на реальных данных. Полученные результаты подтверждают эффективность применения FP-Growth в e-commerce и его пригодность для масштабирования [3].

Ключевые слова: FP-Growth, ассоциативные правила, частые наборы, рекомендации, e-commerce, JavaScript, анализ транзакций, веб-приложения, CSV, адаптивная верстка, рекомендательная система.

Введение

Анализ ассоциативных правил является важным инструментом в исследованиях покупательского поведения и выявлении устойчивых сочетаний товаров. Он позволяет формировать персонализированные рекомендации и улучшать маркетинговые стратегии. Методы ассоциаций применяются в ритейле, логистике, медицине, финансовой сфере, образовательных системах, биоинформатике и других областях. Алгоритм FP-Growth обеспечивает быстрый поиск частых наборов благодаря компактному дереву FP и высокой масштабируемости. В рамках исследования целью являлась разработка системы рекомендаций товаров на основе FP-Growth и адаптация алгоритма под JavaScript для работы в веб-среде.

1. Адаптация алгоритма FP-Growth под JavaScript

1.1. Требования к веб-странице

Разрабатываемая веб-страница для демонстрации работы алгоритма FP-Growth должна соответствовать ряду обязательных требований, обеспечивающих удобство взаимодействия пользователей с системой рекомендаций. Прежде всего, интерфейс страницы должен обладать кроссплатформенной адаптивной версткой, позволяющей корректно отображать элементы как на компьютерах и ноутбуках, так и на мобильных устройствах. В основе организации структуры используется методология БЭМ в сочетании с подключением файла `reset.css`, что обеспечивает стандартизацию стилей и упрощает поддержку проекта.

Важной частью реализации является применение асинхронных скриптов, которые исключают избыточную логику и обеспечивают плавную загрузку данных без блокировки интерфейса. Веб-страница должна корректно обрабатывать входные CSV-файлы, соблюдая необходимую структуру данных, так как именно на их основе будут формироваться карточки товаров и рекомендации. Карточки создаются динамически, что позволяет легко обновлять каталог и отображать актуальную информацию пользователю [1].

Интерфейс включает два основных блока: каталог товаров и модуль рекомендаций, который изменяется в зависимости от выбранного товара. Для удобства взаимодействия реализуются кнопки «Показать ещё» и «Добавить в выборку», позволяющие пользователю постепенно расширять отображаемый список или формировать выборку для анализа. При этом система не должна сохранять состояние рекомендаций между сессиями, что обеспечивает чистоту данных при каждом новом использовании страницы.

Таким образом, совокупность технических требований создаёт фундамент для корректной работы алгоритма рекомендаций в браузере и обеспечивает удобный и интуитивный пользовательский интерфейс.

1.2. Создание верстки и стилизации

Верстка веб-страницы начинается с формирования корректного HTML-документа, что подразумевает использование декларации `<!DOCTYPE html>`, а также указание языка страницы и подключение необходимых файлов CSS и JavaScript [2]. Дополнительное внимание уделяется корректному заполнению метаданных, обеспечивающих правильное отображение страницы браузерами и внешними сервисами.

Структура документа формируется таким образом, чтобы адаптивная сетка позволяла интерфейсу подстраиваться под различные разрешения экранов. На странице располагаются контейнеры, внутри которых динамически отображаются элементы, полученные после обработки CSV-файла: карточки товаров, их описания, изображения и блок рекомендаций. Благодаря адаптивному подходу страница остаётся удобной на любом устройстве, а продуманная стилизация делает интерфейс визуально цельным и логичным.

1.3. Использование FP-Growth для системы рекомендации

Для построения системы рекомендаций используется алгоритм FP-Growth, который позволяет эффективно анализировать транзакционные данные и находить наиболее частотные сочетания товаров. Обработка данных алгоритмом выполняется в два основных прохода. На первом этапе происходит подсчет частоты появления каждого товара в наборе транзакций. Этот шаг необходим для последующего построения структуры FP-дерева.

На втором этапе формируется FP-дерево — компактная структура данных, в которой элементы упорядочиваются в соответствии с их частотностью. Такое дерево позволяет эффективно выделять повторяющиеся комбинации товаров и искать наиболее значимые взаимосвязи. Благодаря компактности FP-дерева поиск частых наборов выполняется значительно быстрее по сравнению с алгоритмами, использующими генерацию кандидатов.

Финальным шагом является извлечение частых наборов и формирование рекомендаций на их основе. Встроенная рекурсивная процедура позволяет определять сочетания товаров, которые часто встречаются вместе, и использовать эти данные при анализе пользовательских запросов. Засчёт оптимизированного процесса поиска алгоритм демонстрирует линейную сложность относительно числа транзакций и хорошо масштабируется на большие наборы данных.

1.4. Реализация FP-Growth на JavaScript (сжатое содержание)

Реализация алгоритма FP-Growth на языке JavaScript предполагает интеграцию всех описанных этапов в работу клиентской части веб-приложения. JavaScript обеспечивает динамическую обработку данных, построение FP-дерева и генерацию рекомендаций в реальном времени непосредственно в браузере пользователя [7]. На практике это включает создание структур

данных для хранения частот, формирование узлов дерева, построение условных деревьев и вычисление частых наборов.

Вся логика работы алгоритма связывается с интерфейсом страницы: после загрузки CSV-файла данные преобразуются в необходимый формат, объединяются в транзакции, а затем передаются алгоритму. На основе вычисленных частых наборов система формирует рекомендации, которые браузер отображает в соответствующем блоке интерфейса.

Таким образом, реализация FP-Growth на JavaScript позволяет создать полноценную клиентскую рекомендательную систему, работающую без серверной части и обеспечивающую быстрый отклик, масштабируемость и удобство использования.

2. Тестирование системы рекомендаций

2.1. Тестирование функциональности

После реализации алгоритма FP-Growth и интеграции его в интерфейс веб-страницы была проведена серия тестов, направленных на проверку корректности работы функциональных элементов и отображения рекомендаций. В ходе тестирования особое внимание уделялось динамическому взаимодействию между каталогом товаров и блоком рекомендаций.

Система корректно отображает ограниченное число товаров при первой загрузке страницы, а при использовании кнопки «Показать ещё» — добавляет новые элементы. При выборе конкретного товара блок рекомендаций обновляется автоматически, подбирая позиции, связанные с ним на основе ранее загруженных транзакций.

Отдельно проверялась работа кнопки «Рекомендации», которая позволяет формировать временную коллекцию товаров для анализа. Интерфейс реагирует на действия пользователя без задержек, а рекомендации генерируются на основе актуальных данных, полученных после обработки CSV-файла [6]. На рис. 1 показано оформление каталога товара и вывода рекомендаций.

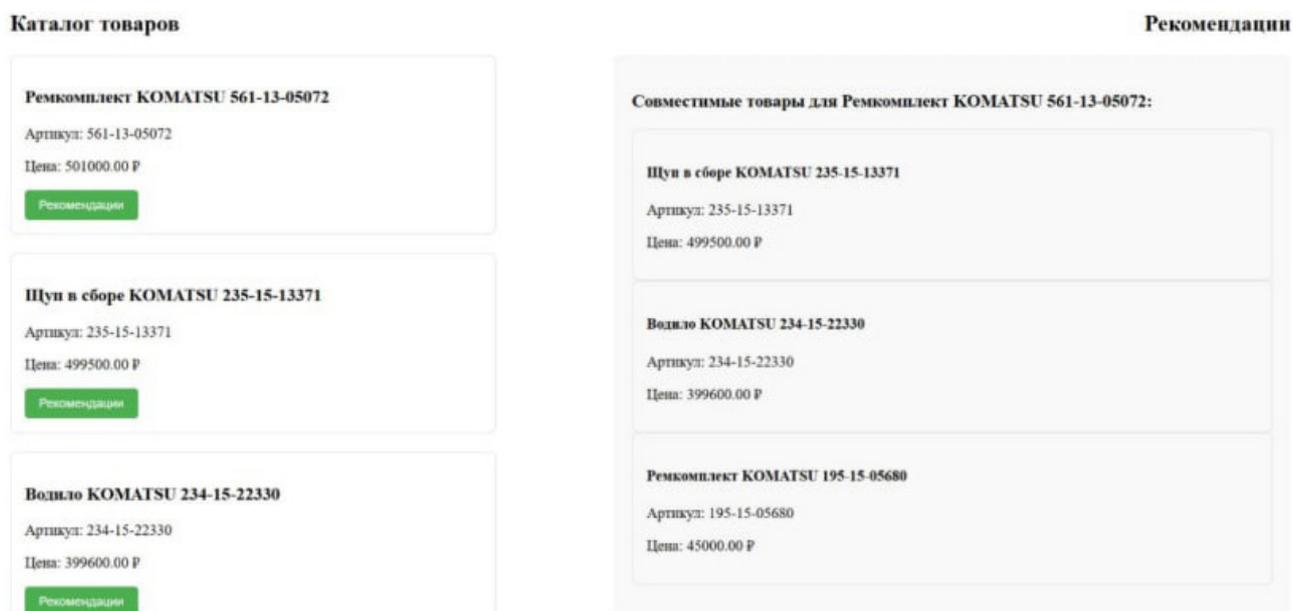


Рис. 1

2.2. Тестирование адаптивности и совместимости

Важной частью тестирования стала оценка адаптивности страницы на различных устройствах. Интерфейс корректно масштабируется и подстраивается под экраны компьютеров, но-

утбуков и мобильных телефонов. Элементы карточек товаров остаются доступными и читаемыми при любом разрешении [4].

Кроссбраузерное тестирование показало стабильную работу интерфейса в популярных браузерах: Google Chrome, Firefox и Яндекс.Браузере. Все основные сценарии взаимодействия — загрузка данных, обновление рекомендаций, работа кнопок и динамическое создание карточек — функционируют одинаково корректно.

Заключение

В ходе исследования была разработана и протестирована система рекомендаций, основанная на алгоритме FP-Growth и реализованная с использованием JavaScript. Работа включала анализ методов ассоциаций, подготовку данных, построение FP-дерева и создание механизма генерации рекомендаций в реальном времени.

Проведённые тесты подтвердили корректность работы алгоритма и интерфейса веб-страницы. Реализация показала высокую скорость обработки данных и способность эффективно масштабироваться при увеличении количества транзакций.

Разработанная система может применяться в интернет-магазинах и других сферах электронной коммерции, где требуется анализировать поведение пользователей и формировать персонализированные предложения. Использование FP-Growth в браузере без серверной части делает решение лёгким, автономным и удобным для интеграции в различные веб-приложения.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю за консультации, методическую поддержку и рекомендации, оказанные в процессе выполнения исследования. Работа выполнена в рамках учебной деятельности и не финансировалась за счёт грантов или иных внешних источников.

Литература

1. *Waheeb W., Ghazali R., Shah H.* Nonlinear Autoregressive Moving-average Time Series Forecasting Using Neural Networks.
2. *Wang Z.* A Multi-Level Association Rule Mining Algorithm Based on NSGA-II.
3. *Solanki S., Patel J.* A Survey on Association Rule Mining.
4. *Wen-xiu X., Heng-nian Q., Mei-li H.* Market Basket Analysis Based on Text Segmentation.
5. *Kantardzic M.* Data Mining: Concepts, Models, Methods and Algorithms — Association Rules.
6. *Larose D., Larose C.* Association Rules.
7. *Gassama A., Camara F.* Parallel FP-Growth under Apache Spark.
8. *Lavangnananda K.* Associative Rules Generator for Classification.

ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ НАУЧНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ ВЫСШИХ ВЕДОМСТВЕННЫХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ В ОБЛАСТИ ИНФОРМАТИКИ

А. И. Расторгуева

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж

Аннотация. В статье рассмотрены особенности научной работы учащихся высших гражданских и на их основе ведомственных учебных заведений в области информатики, представлены актуальность темы, определение научной работы учащихся, её основные и вспомогательные задачи, формы проведения, специфика, проблемные условия, затрудняющие её проведение и способы их решения и повышения её эффективности. Рассмотрен основополагающий фактор, способный улучшить и сделать более продуктивным процесс освоения вспомогательных знаний в области информатики.

Ключевые слова: научная работа, научный кружок, научная секция, преподавание информатики, высшие ведомственные учебные заведения.

Введение

Стремительное всестороннее изменение окружающего мира, проникновение передовых, в том числе информационных технологий в различные сферы деятельности человека, укрепление позиций современного государства на мировой арене – всё это требует развития науки, её продвижения, популяризации, привлечения в научной деятельности творческих, нестандартно мыслящих, открытых всему новому молодых кадров. Приобщение учащихся высших учебных заведений к исследованиям обновляет научную среду, привносит новизну мышления и взглядов, позволяя активно развивать технологии и достигать значительных успехов.

1. Научная работа учащихся

1.1. Определение научной работы учащихся вузов

Научная работа учащихся вузов — исследовательская деятельность, ориентированная на осознанное обучение в тесном взаимодействии с научным руководителем, закрепление полученных знаний и умений. При этом важно соблюдать следующие требования:

- актуальности (решаемые задачи должны быть важны в настоящее время);
- новизны (работа должна содержать нечто ранее не известное, не рассмотренное; важен личный вклад учащегося в исследовании);
- достоверности;
- важности, полученных в ходе научной работы результатов.

1.2. Задачи научной работы учащихся вузов

К основным задачам научной работы учащихся высших учебных заведений относятся:

- расширение знаний по выбранной профессии и дополнительно к ней;
- развитие критического и аналитического мышления;
- развитие интереса к самостоятельной творческой деятельности, к совместной работе при решении научных задач;

– выявление наиболее одарённых учащихся, способных в дальнейшем продолжать заниматься научной деятельностью, в том числе работать над диссертационным исследованием как аспирант или соискатель учёной степени кандидата наук.

Так же задачами научной работы учащихся высших учебных заведений являются:

- развитие дисциплины при выполнении необходимых работ (при проведении экспериментов, выполнении индивидуальных заданий, оформлении отчётов и др.);
- развитие навыка публичных выступлений на заседаниях научного кружка или секции, на конференциях, на конкурсах и др.;
- развитие коммуникационных навыков (внутри научного коллектива, на семинарах, конференциях, конкурсах, выставках);
- знакомство с принципами компьютерных наук, умение найти им применение в учебном и других процессах деятельности человека.

1.3. Формы научной работы учащихся вузов

Основными формами участия учащихся в научной работе являются:

- выступления с докладами по теме проводимых исследований;
- выступления с сообщениями о проделанной работе (патентный поиск, разработка рационализаторских предложений и др.);
- участие в научно-исследовательских работах;
- участие в научных и научно-практических конференциях, форумах, круглых столах;
- участие в научных конкурсах;
- участие в выставках;
- публикация научных статей;
- разработка программных продуктов, их регистрация и др.

Спектр форм проведения научной работы с учащимися зависит от направления исследований научной школы, научного направления руководителя, целей и задач научного кружка или секции.

2. Специфика научной работы в высших ведомственных учебных заведениях

В отличие от работы научных кружков в гражданских вузах, функционал научных обществ в вузах силовых структур имеет ряд ограничений:

- строго регламентированный распорядок дня учащихся;
- отвлечение обучающихся для выполнения специальных задач;
- ограничения доступа к сетевым информационным ресурсам.

Отдельно стоит рассмотреть специфику научной работы учащихся по информатике.

Это направление актуально, но его реализация в значительной степени осложнена. Ряд необходимых пакетов программ стал недоступен в связи с санкциями, а производители некоторых отечественных аналогов официально заявляют, что «не сотрудничают с ведомственными организациями». Более того, многие в том числе отечественные программные продукты для своего функционала требуют подключения к

3. Организация эффективной научной работы учащихся вузов силовых структур

Для достижения эффективного решения поставленных задач в рамках научных секций в высших ведомственных учебных заведениях применяется следующее:

- разработка индивидуальных планов с учётом ограничений распорядка дня;
- оптимизация временных и учебных ресурсов;

- подготовка соответствующих методических материалов (важную роль при этом играют интерактивные пособия и пособия в печатном виде, справочники, руководства);
- использование программного обеспечения и программно-аппаратных комплексов, не требующих подключения к информационно-коммуникационной сети «Интернет», wi-fi, bluetooth, ГЛОНАСС и др.;
- организация исследовательской деятельности таким образом, чтобы участник кружка учился подмечать полезные для своих научных изысканий идеи в процессе прохождения учебной программы, во время практических занятий и самоподготовки;
- совместное с учащимися-членами научного кружка или секции обсуждения возможных вариантов решения ограничительных проблем при исследовании в области информатики.

Работа научного руководителя учащихся-членов научного кружка или секции в высших ведомственных учреждениях требует серьёзной и трудозатратой подготовки, предполагающей нахождение компромисса между объёмом материала, который нужно довести до учащихся, и его содержанием.

Как показывает практика наиболее эффективной и интересной получается научная работа одновременно по двум направлениям с двумя сотрудничающими руководителями (например, по автомобильной технике и по информатике).

Одним из основополагающих факторов успешной работы любых научных кружков и секций, в том числе и высших ведомственных учебных заведений, является личность наставника. Его профессионализм, его нацеленность на активное вовлечение учащихся в научную деятельность, его готовность поддерживать членов своей научной команды, направлять их и в то же время позволять им проявить себя, показать свою самостоятельность в исследованиях, в решениях вопросов, не имеющих стандартных, заранее известных ответов. Научная деятельность — это деятельность, основанная на знаниях, но требующая творческого подхода.

Важно выявить способности и интересы учащихся-членов научного кружка или секции. Попытка навязать работу по направлению, чуждому участнику исследования, приведёт к резкому снижению мотивации, и как следствие – к добровольному исключению из работы.

Заключение

Научная работа учащихся высших ведомственных заведений по основным признакам похожая на соответствующую деятельность в гражданских высших учебных заведениях, в значительной степени отличается от них благодаря специфике организации распорядка дня и ограничений по работе с глобальными общедоступными технологиями.

В связи с этим успех и результативность научной работы зависит в немалой степени и от научного руководителя, его подхода к подготовке членов научного общества, правильного выбора программного и аппаратного обеспечения.

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ИНСТРУМЕНТОВ ГЕНЕРАТИВНОГО ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В УСЛОВИЯХ УГЛУБЛЁННОГО ИЗУЧЕНИЯ ИНФОРМАТИКИ В 8 КЛАССЕ

М. С. Ружников

ГБОУ Школа № 2116 «Зябликово»

Аннотация. В статье представлена систематизация инструментов генеративного искусственного интеллекта (ГИИ) в контексте реализации федеральной рабочей программы по информатике для 8 класса (углублённый уровень, 68 ч). Анализ выполнен по трём разделам: Математические основы информатики, Алгоритмизация и программирование, Обработка числовой и текстовой информации. Критерии отбора — поддержка русского языка, бесплатность, доступность в РФ, предметная применимость по шкале: 2 — полная, 1 — частичная, 0 — не применим. Установлено, что только четыре инструмента — YandexGPT / Яндекс Учебник, Quizizz AI, GigaChat, Edu-Assist — получили оценку 2 по всем трём разделам. Для каждого раздела сформированы сводные таблицы с указанием сайта и обоснованием применимости. Результаты позволяют сформировать персонализированные наборы инструментов под конкретные темы курса.

Ключевые слова: генеративный искусственный интеллект; информатика; 8 класс; углублённое изучение; систематизация инструментов; федеральная рабочая программа; цифровые технологии.

Введение

Федеральная рабочая программа по информатике для 8 класса (углублённый уровень, 2 ч/нед, 68 ч в год) предполагает расширенное изучение трёх взаимосвязанных разделов [1]:

1) Математические основы информатики — системы счисления (перевод между двоичной, восьмеричной, шестнадцатеричной), представление целых и вещественных чисел, элементы теории множеств (операции, диаграммы Эйлера — Венна), алгебра логики (таблицы истинности, законы, упрощение выражений), построение логических схем;

2) Алгоритмизация и программирование — алгоритмические конструкции (ветвление, циклы с предусловием и по счётчику), переменные (типы: int, float, str, bool), ввод/вывод, отладка и тестирование, программирование на Python (включая списки, строки, функции без параметров/с параметрами);

3) Обработка числовой и текстовой информации — электронные таблицы (относительные/абсолютные ссылки, функции: СУММ, СРЗНАЧ, ЕСЛИ, И, ИЛИ, ВПР, ПОИСК, ЛЕВСИМВ, ПРАВСИМВ), построение диаграмм и графиков, сортировка и фильтрация данных, табличные базы данных (ключ, поиск по условию).

Реализация такого курса требует от учителя значительных временных затрат:

– на подготовку объяснений сложных теоретических понятий (например, преобразование логических выражений по законам де Моргана);

– на составление разноуровневых заданий по программированию (базовый — линейные программы, продвинутый — ветвления, углублённый — функции);

– на разработку практических работ по электронным таблицам с реальными данными (например, анализ успеваемости класса с использованием фильтрации и сводных таблиц).

В этих условиях инструменты генеративного искусственного интеллекта (ГИИ) могут выступить в роли цифровых ассистентов - при условии их предметной релевантности и технической доступности.

Цель статьи — провести систематизацию ГИИ-инструментов на основе их применимости к указанным трём разделам программы, с учётом требований российской образовательной среды.

Методология: формирование критериев отбора

Критерии отбора были сформированы на основе анализа практических ограничений, с которыми сталкивается учитель информатики в РФ, и содержательных требований федеральной программы.

Всего выделено две группы критериев:

1. Практические ограничения (обеспечивают техническую реализуемость):

– Поддержка русского языка — учитывалась как полная (Полная), частичная (Частичная — например, TTS на русском, но интерфейс на английском) и отсутствие. Для ядра требовалась только «Полная».

– Доступность в РФ — отмечалась как «Полная» (работает без VPN), «Ограничена» (требуется обход блокировок), и «Недоступен». Для ядра — только «Полная».

– Бесплатный доступ — учитывались только инструменты с подтверждённым бесплатным тарифом для школ/учителей. Инструменты с неуказанными тарифами (Edu-Assist) включались в ядро с оговоркой.

2. Содержательная применимость (обеспечивает предметную релевантность):

– Оценка по трём разделам программы 8 класса: «Математические основы информатики» (МОИ), «Алгоритмизация и программирование» (АиП), «Обработка числовой и текстовой информации».

– Использовалась единая числовая шкала:

2 — полная применимость (инструмент решает учебные задачи раздела без адаптации),

1 — частичная (требуется доработка, ограниченный функционал),

0 — не применим (нет соответствия содержанию).

Данные по всем 24 инструментам и 17 параметрам были собраны в структурированную таблицу. На её основе проведён сравнительный анализ и выделены группы инструментов:

1. Ядро инструментов ИИ для углублённого курса информатики в 8 классе

Анализ данных показал, что только 4 инструмента одновременно отвечают всем четырём требованиям: оценка 2 по всем трём разделам, полная поддержка русского языка, полная доступность в РФ, и бесплатный доступ: YandexGPT / Яндекс Учебник (<https://yandex.ru/edu>), Quizizz AI (<https://quizizz.com/ai>), GigaChat (<https://gigachat.ru>), Edu-Assist (<https://edu-assist.me/>).

Эти инструменты позволяют:

– генерировать объяснения законов алгебры логики и примеры преобразований;

– создавать задания на чтение и написание программ на Python с ветвлениями и циклами;

– разрабатывать практические работы по электронным таблицам с использованием логических и текстовых функций.

Особо отметим, что YandexGPT / Яндекс Учебник интегрирован непосредственно в федеральную платформу «Яндекс Учебник», что обеспечивает соответствие Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования (ФГОС ООО) и безопасность персональных данных. Quizizz AI позволяет не только генерировать задания, но и автоматически проверять их в режиме реального времени, что критически важно для формирующего оценивания. GigaChat, будучи полностью русскоязычной моделью, особенно эффективен при генерации сложных текстовых пояснений. Edu-Assist специализируется на подготовке методических материалов (конспекты, планы), что экономит время на подготовку к урокам.

2. Инструменты по разделам программы углублённого курса информатики в 8 классе

2.1. Раздел «Математические основы информатики»

Этот раздел требует высокой точности в объяснениях и визуализации абстрактных понятий (логические схемы, множества). Наиболее эффективны инструменты (табл. 1), способные генерировать не только текст, но и схемы.

Таблица 1

Инструменты ГИИ для раздела «Математические основы информатики»

Название инструмента ГИИ	Сайт	МОИ	Обоснование
YandexGPT / Яндекс Учебник	https://yandex.ru/edu	2	Генерация текстовых объяснений, логических задач, тестов. Пример: «Объясни ученику 8 класса, как упростить выражение $\neg(A \vee B) \wedge C$, используя законы де Моргана».
Quizizz AI	https://quizizz.com/ai	2	Создание тестов с автоматической проверкой. Пример: трассировка таблицы истинности для выражения $(A \rightarrow B) \wedge (\neg B \vee C)$.
GigaChat	https://gigachat.ru	2	Генерация логических задач разного уровня сложности, включая задачи на круги Эйлера — Венна.
Tree of Knowledge	https://tree-of-knowledge.org/	2	Автоматическое построение схем знаний и графов логических связей. Например, визуализация иерархии: «Информация → Кодирование → Системы счисления → Двоичная система».
Napkin.ai	https://www.napkin.ai/	2	Визуализация кругов Эйлера, логических схем из текстового описания. Например, ввод: « A — множество чётных чисел, B — множество кратных 3. Покажи $A \cap B$ », — вывод: диаграмма с пересечением.
Edu-Assist	https://edu-assist.me/	2	Подготовка конспектов по дискретной математике (системы счисления, логика), включая примеры и упражнения.

2.2. Раздел «Алгоритмизация и программирование»

Ключевая задача инструментов ИИ в этом разделе (табл. 2) — генерация корректного кода на Python и его объяснение. Особенно важно, чтобы инструмент учитывал специфику школьного курса.

2.3. Раздел «Обработка числовой и текстовой информации»

В 8 классе акцент сделан на электронные таблицы, поэтому приоритетны инструменты ГИИ, поддерживающие генерацию формул и диаграмм (табл. 3).

Таблица 2

Инструменты ГИИ для раздела «Алгоритмизация и программирование»

Название инструмента ГИИ	Сайт	АиП	Обоснование
YandexGPT / Яндекс Учебник	https://yandex.ru/edu	2	Генерация и разбор кода на Python, объяснение ошибок. Пример: «Напиши программу, которая находит максимальное из трёх введённых чисел, используя только if (без elif и else)».
Quizizz AI	https://quizizz.com/ai	2	Тесты по синтаксису и трассировка программ. Пример: «Какое значение будет выведено: <code>a = 5; for i in range(3): a += i; print(a)?</code> »
GigaChat	https://gigachat.ru	2	Написание фрагментов кода, объяснение алгоритмов. Эффективен при генерации программ с вложенным ветвлением.
Napkin.ai	https://www.napkin.ai/	2	Построение блок-схем алгоритмов из текстового описания. Например: «Алгоритм нахождения НОД двух чисел методом Евклида» → автоматическая блок-схема.
Edu-Assist	https://edu-assist.me/	2	Разработка планов уроков и заданий по программированию (линейные, разветвлённые, циклические).
Curipod	https://curipod.com	1	Интерактивные слайды с базовыми алгоритмическими схемами, но без генерации кода.
Шедеврум	https://shaduruim.ru	1	Иллюстрации циклов, ветвлений (например, «цикл с предусловием»), но без привязки к синтаксису Python.
Фокус	https://fokus.am	1	Презентации с блок-схемами, требующие ручного редактирования.

Таблица 3

Инструменты ГИИ для раздела «Обработка числовой и текстовой информации»

Название инструмента ГИИ	Сайт	МОИ	Обоснование
YandexGPT / Яндекс Учебник	https://yandex.ru/edu	2	Объяснение синтаксиса функций ('ЕСЛИ', 'ВПР', 'ЛЕВСИМВ'), примеры формул. Пример: «Как найти первую букву фамилии в ячейке A1? =ЛЕВСИМВ(A1;1)».
Quizizz AI	https://quizizz.com/ai	2	Тесты на знание функций, интерпретацию диаграмм. Пример: «Какая функция вернёт ИСТИНУ, если $A1 > 10$ и $B1 < 5$? = И($A1 > 10$; $B1 < 5$)».

GigaChat	https://gigachat.ru	2	Генерация задач на обработку табличных данных (например, «Рассчитайте итоговую оценку как среднее арифметическое, округлённое вверх»).
Slidesgo	https://slidesgo.com/	2	Готовые шаблоны презентаций по Excel в разделе «Education», включая слайды с пошаговыми инструкциями.
Edu-Assist	https://edu-assist.me/	2	Планы уроков по электронным таблицам, включая практические задания с реальными данными.
Curipod	https://curipod.com	2	Интерактивные слайды с примерами таблиц, диаграмм, фильтрации — с возможностью добавления вопросов для учащихся.
Clipchamp	https://clipchamp.com/ru/	1	Видеоинструкции по работе в Excel (например, запись экрана с голосовым сопровождением), но с водяным знаком в бесплатной версии.
Renderforest	https://www.renderforest.com/	1	Анимированные объяснения построения графиков (до 3 минут), но с водяным знаком и ограничением на длительность.

Заключение

Проведённая систематизация инструментов генеративного искусственного интеллекта позволила достичь поставленной цели — сформировать обоснованные рекомендации по отбору ГИИ-инструментов для углублённого курса информатики в 8 классе. По итогам анализа сформулированы следующие выводы.

1. По соответствию содержанию программы курса информатики 8 класса (углублённый уровень):

– Только 4 инструмента — YandexGPT / Яндекс Учебник, Quizizz AI, GigaChat, Edu-Assist — получили оценку 2 (полная применимость) по всем трём разделам: «Математические основы информатики», «Алгоритмизация и программирование», «Обработка числовой и текстовой информации». Это означает, что они способны поддерживать учительскую деятельность на всех содержательных уровнях курса без необходимости адаптации.

– Narkin.ai является уникальным инструментом с оценкой 2 по всем трём разделам одновременно, несмотря на англоязычный интерфейс — за счёт специализации на визуализации: автоматическое построение блок-схем, кругов Эйлера и схем обработки данных из текстового описания напрямую соответствует ключевым дидактическим задачам 8 класса.

2. По практической доступности в РФ:

– Все инструменты с оценкой 2 по любому разделу являются полностью доступными в РФ, за исключением Narkin.ai, который технически доступен, но требует владения английским языком.

– Ни один из инструментов с оценкой 2 не требует платной подписки для базового педагогического применения. Исключение — Edu-Assist, где информация о тарифах отсутствует, но наличие ограничений на бесплатный доступ не зафиксировано.

– Таким образом, языковой, экономический и географический барьеры не препятствуют применению инструментов ГИИ учителем при преподавании углублённого курса информатики — при условии отбора по критерию предметной релевантности.

3. По методической целесообразности:

– Для повседневной подготовки (конспекты, задания, тесты) рекомендуется использовать ядро из 4 инструментов (YandexGPT / Яндекс Учебник, Quizizz AI, GigaChat, Edu-Assist).

– Для визуализации теоретических понятий (логические схемы, графы, алгоритмы) — подключать Napkin.ai и Tree of Knowledge.

– Для подготовки презентаций и инфографики по электронным таблицам — использовать Slidesgo и Curipod.

– Инструменты с оценкой 1 могут применяться эпизодически, при наличии конкретной дидактической задачи (например, Clipchamp — для записи коротких видеоинструкций, Renderforest — для анимации диаграмм), но не в качестве основного ассистента учителя [2].

4. Ограничения и границы применимости:

– Даже инструменты с оценкой 2 не заменяют учителя: они не проводят диагностическую беседу, не корректируют индивидуальные ошибки мышления, не оценивают креативные решения. Их роль — сократить время на рутинные операции [3, 4].

– Генерация кода (GigaChat, YandexGPT) требует обязательной проверки на корректность и дидактическую целесообразность — в 15–20 % случаев ИИ вводит синтаксические или логические ошибки, маскируя их под правдоподобное объяснение [3, 5].

5. Перспективы методического сопровождения:

Результаты систематизации позволяют разработать методические карты «тема → инструмент → сценарий».

Таким образом, систематизация на основе объективных критериев позволяет перейти от стихийного экспериментирования с технологиями к осознанному, предметно обоснованному внедрению инструментов ГИИ, соответствующему ФГОС ООО и федеральной рабочей программе. Это создаёт предпосылки для тиражирования лучших практик и повышения качества преподавания информатики на всей территории Российской Федерации.

Литература

1. Федеральная рабочая программа основного общего образования по учебному предмету «Информатика» (углублённый уровень) [Электронный ресурс] // Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт стратегии развития образования Российской академии образования». – URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2025/07/2025_ooo_frp_informatika-7-9_ugl.pdf (дата обращения: 16.10.2025).

2. Валькова Ю. Е. Использование искусственного интеллекта на занятиях по иностранному языку в вузе / Ю. Е. Валькова // Вестник Московского университета. Серия 20: Педагогическое образование. – 2025. – Т. 23, № 1. – С. 137-151. – DOI 10.55959/LPEJ-25-07. – EDN ZNFRFB.

3. Мишин В. А. Цифровые инструменты разноуровневого обучения программированию в основном общем образовании / В. А. Мишин // Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования. – 2025. – № 2(72). – С. 98-113. – DOI 10.24412/2072-9014-2025-272-98-113. – EDN CCHPBX.

4. Трепакова Е. В. Искусственный интеллект в экосистеме школы: возможности для учителя информатики / Е. В. Трепакова // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. – 2024. – № 3(71). – С. 264–269. – EDN NCFVWI.

5. OECD. AI in Education: A Framework for Policy and Practice. – Paris : OECD Publishing, 2023. – 142 p. DOI: 10.1787/1e2a6b0f-en

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ЦИФРОВОЙ КАФЕДРЫ

А. Д. Сотников, Г. Р. Катасонова

*Санкт-Петербургский государственный университет
телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича*

Аннотация. Рассматривается прикладная информационная система — образовательная информационная среда (ОИС) как совокупность информационных процессов управления системой цифровой кафедры на основе доменной модели инфокоммуникаций (ДМИ). Эта формальная модель позволяет представить сложную систему, такую как ОИС в виде набора взаимодействующих процессов, формализованных с помощью ДМИ для разложения сложной задачи на более мелкие и управляемые части.

Ключевые слова: образование, цифровая кафедра, доменная модель инфокоммуникаций, образовательная информационная система.

Введение

Современное образование переживает эпоху стремительной цифровой трансформации, которая коренным образом меняет процессы обучения и преподавания. Ключевым элементом этой трансформации является образовательная информационная среда — комплекс взаимосвязанных информационных ресурсов, технологических средств и организационных структур, обеспечивающих доступ к знаниям и возможность эффективного взаимодействия между участниками образовательного процесса.

Одним из актуальных и перспективных направлений современной образовательной информационной среды являются «цифровые кафедры», открытые в 114 вузах РФ, где студенты 2–3 курсов бакалавриата/специалитета и 1 курса магистратуры получают возможность осваивать новые компетенции в области информационных технологий. Обучение в рамках проекта «Цифровая кафедра» проводится одновременно с обучением студентов по основной образовательной программе ВУЗа.

В рамках новых программ студенты получают комплексные знания и практические навыки в области:

- 1) программирования на Python;
- 2) анализа и визуализации данных;
- 3) работы с современными BI-инструментами и системами автоматизации бизнес-процессов;
- 4) применения технологий искусственного интеллекта (ИИ), машинного и глубокого обучения, генеративного ИИ;
- 5) цифровизации отраслевых процессов.

Обучение охватывает математическое моделирование, обработку больших данных, разработку цифровых решений для различных предметных областей с акцентом на выполнение практических проектов, интеграцию цифровых инструментов в профессиональную деятельность студентов конкретных направлений.

Таким образом, цифровые кафедры — это единое информационное пространство, в котором студенты, преподаватели и администрация ВУЗа могут взаимодействовать, обмениваться знаниями, совместно работать над проектами [1] и получать доступ к актуальной информации с использованием различных площадок, социальных сетей, игровых платформ, многочисленных информационных ресурсов и метавселенных [2].

Основная часть

Проектирование и создание сложных информационных систем, таких как цифровые двойники (создают виртуальные модели физических объектов или процессов для анализа и оптимизации) или системы на основе нейронных сетей и искусственного интеллекта (обучаются на данных для автоматизации задач и принятия решений) осуществляется с использованием разнообразных моделей, методов, технологий и инструментов, что в совокупности позволяет:

- 1) создавать персонализированные образовательные траектории — планирование последовательности учебных курсов и материалов под индивидуальные интересы и цели студента [3];
- 2) адаптировать учебные материалы под индивидуальные потребности каждого студента, учитывая базовый уровень знаний и психоэмоциональный стиль обучения;
- 3) автоматизировать рутинные задачи при проверке заданий или создании расписаний.

Методологическим решением этой проблемы может стать доменная модель инфокоммуникаций (ДМИ), рассматривающая в качестве основного компонента элементарное информационное взаимодействие, как основного объекта анализа и инструмента проектирования на основе описания информационных процессов в системе. ДМИ представляет собой методологический подход к анализу сложных информационных систем, который позволяет структурировать процессы взаимодействия и выявлять возможности для оптимизации, используя когнитивный, информационный и физический уровни (рис. 1).

Любая интеллектуальная деятельность, связанная с анализом и выбором вариантов, продуктом которой являются оценки и принятие решений — это продукт ментальной и психической активности, протекающей в сфере «идеального», которая представлена в когнитивном домене (КД). Информационный домен (ИД) — это область, в которой присутствуют и циркулируют данные («информация»), используемые в когнитивном домене для реализации процессов управления и представляющие объекты, явления и процессы физического домена.



Рис. 1. Доменная модель инфокоммуникаций

Доменная модель инфокоммуникаций структурирует процессы информационного взаимодействия внутри ОИС, выявляя узкие места и возможности для оптимизации. Примером элементарного информационного взаимодействия является передача оценки за экзамен из ведомости в базу данных успеваемости студента, где ДМИ формализует данный процесс, определяет параметры, оптимизирует для обеспечения надежности и скорости передачи данных, раскладывая сложную систему на простые элементы взаимодействия, что облегчает анализ и оптимизацию образовательной информационной среды, делая ее более эффективной и управляемой.

Доменная модель инфокоммуникаций может помочь в анализе и оптимизации использования системы управления обучением (LMS), цифровых библиотек, инструментов для совместной работы и других компонентов, составляющих современные образовательные сервисы цифровой кафедры. При наличии широкого спектра доступных методов, технологий и инструментов для проектирования сложных информационных систем, включая цифровые двойники и системы на основе нейронных сетей/искусственного интеллекта, ДМИ предлагает структурированный подход к их применению для решения специфических задач образовательной среды, а именно, вместо стремления к созданию жесткой формализованной модели.

ДМИ — это гибкий и адаптивный методологический инструмент, позволяющий анализировать и проектировать сложные образовательные информационные среды, улучшая их эффективность и адаптируя к постоянно меняющимся потребностям современного образования, рассматривает в качестве основного компонента элементарное информационное взаимодействие, как основного объекта анализа и инструмента проектирования на основе описания информационных процессов в системе [4].

В аналитической форме доменная модель [6] описывается выражением:

$$\langle A_1 \rangle^{\xi A_1 Q_{12}^{\xi A_1 \xi C_1^1}} \rightarrow \langle A_1 \rangle^{\xi A_1} \langle C_1^1 \rangle^{Q_{23}^{\xi C_1^1 \xi B_1}} \rightarrow \langle C_1^1 \rangle^{\xi C_1^1} \langle B_1 \rangle^{\xi B_1} \quad (1)$$

или

$$\langle \langle A_1 \rangle^{\xi A_1} \rangle^{\xi C_1^1} \langle B_1 \rangle^{\xi B_1} \quad (2)$$

где A_1, C_1, B_1 — объекты физического, информационного и когнитивного доменов соответственно,

ξ — тезаурусы соответствующих объектов,

Q — операторы преобразования тезаурусов объектов при информационном взаимодействии.

Упрощенная графическая иллюстрация доменной модели представлена на рис. 2.

При функционировании цифровых кафедр используются общие информационные ресурсы образовательных учреждений, которые могут предоставлять свои услуги через сетевые платформы. Хотя цифровая кафедра затрагивает все три выделенные области, основная деятельность сосредоточена в информационной сфере, где функционируют различные информационные компоненты и процессы [5].

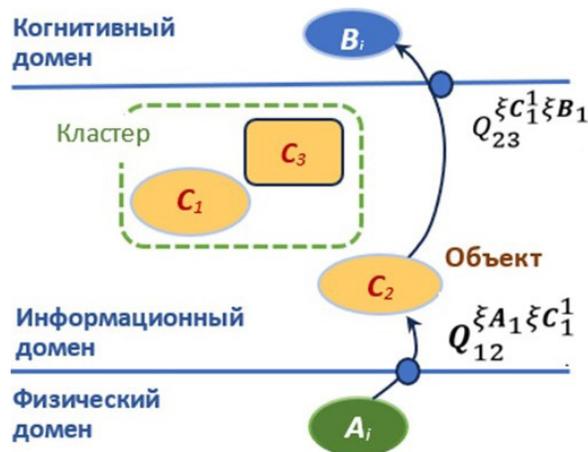


Рис. 2. Упрощенная иллюстрация доменной модели

В качестве информационных компонентов цифровой кафедры можно выделить: электронные документы, обеспечивающие её эффективную работу (учебные программы, планы, ведомости); мультимедийные учебные ресурсы (материалы курсов, видеозаписи лекций и методические пособия). Эти документы, представленные в электронном виде, обеспечивают быстрый

доступ к информации, возможность совместной работы и удобство обновления, что важно для динамично меняющейся образовательной среды. Учебная программа в электронном виде позволяет преподавателям оперативно вносить изменения в содержание курса с учетом актуальных требований рынка труда или последних достижений в науке.

Для поддержки организационных процессов применяются программные инструменты: расписания, протоколы, базы данных участников образовательного процесса и другие сервисы, которые автоматизируют рутинные задачи, уменьшают вероятность ошибок и обеспечивают прозрачность всех процессов — автоматизированное расписание занятий позволяет учитывать занятость аудиторий, предпочтения преподавателей и возможности студентов, минимизируя конфликты и обеспечивая оптимальное распределение ресурсов. Последовательность операций над этими информационными компонентами формирует информационные процессы, которые описывают работу системы в целом и создают условия для её оптимизации. Анализ таких процессов важен как для отдельной цифровой кафедры, так и для образовательной среды в целом. Динамика посещаемости онлайн-лекций поможет выявить проблемные темы, требующие дополнительного объяснения/вовлеченность студентов, требующую корректировки методики преподавания.

Заключение

Предложенная модель (ДМИ), позволяющая формально описывать информационные процессы в прикладных инфокоммуникационных системах, может быть эффективно использована при анализе и проектировании образовательных информационных сред и систем цифровой кафедры [6].

Используя доменную модель инфокоммуникаций, можно формализовать процесс передачи учебных материалов от преподавателя к студенту через электронную платформу, выявить узкие места (например, низкую скорость загрузки файлов) и предложить решения по оптимизации (например, увеличение пропускной способности сети или использование более эффективных форматов файлов). Это приведет к повышению эффективности образовательного процесса и улучшению пользовательского опыта. Таким образом, ДМИ предоставляет инструмент для создания более эффективных, надежных и экономичных образовательных информационных систем.

Таким образом, использование доменной модели инфокоммуникаций, с акцентом на разделение на когнитивный, информационный и физический домены, позволяет более эффективно анализировать и проектировать сложные образовательные информационные среды, такие как цифровые кафедры. Выделение информационных объектов и процессов в информационный домен, с их дальнейшей классификацией на «атомы», «кластеры» и «иерархии», обеспечивает более глубокое понимание структуры и функционирования ОИС и открывает возможности для ее оптимизации, а создание графической схемы, визуализирующей связи между информационными объектами и процессами в когнитивной, информационной и физической областях, служит основой для последующей оптимизации системы.

Литература

1. Катасонова Г. Р. Проектная деятельность студентов медицинского вуза в условиях развития цифровых образовательных технологий / Г. Р. Катасонова, А. С. Шкрум // Конструктивные педагогические заметки. – 2021. – № 9-1 (15). – С. 144–164.

2. Катасонова Г. Р. Организация коммуникаций между студентами и преподавателями в условиях нарастания цифровизации общественного пространства / Г. Р. Катасонова, А. С. Шкрум // В сборнике: Культура, образование и искусство: традиции и инновации. Сбор-

ник статей по материалам IV Всероссийской научно-практической конференции ученых-исследователей, специалистов, преподавателей вузов, колледжей, школ, учреждений дополнительного образования, руководителей образовательных учреждений, аспирантов, студентов научно-практической конференции, посвященной 110-летию нижегородского государственного педагогического университета имени Козьмы Минина. – Нижний Новгород, 2021. – С. 140–145.

3. Арзуманян Ю. В. Особенности моделирования учебных программ при разработке образовательных траекторий обучения ИТ-специалистов / Ю. В. Арзуманян, М. Б. Вольфсон, А. А. Захаров, Г. Р. Катасонова, А. Д. Сотников // В книге: Преподавание информационных технологий в Российской Федерации. Сборник научных трудов материалов Девятнадцатой открытой Всероссийской конференции. – Москва, 2021. – С. 294-295.

4. Катасонова Г. Р. Модель информационных процессов в виртуальных средах // Г. Р. Катасонова, Ю. С. Соломко, А. Д. Сотников, Е. В. Стригина // В сборнике: Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании (АПИНО 2022). Сборник научных трудов XI Международной научно-технической и научно-методической конференции. В 4-х томах. Под редакцией А. В. Шестакова, сост. В. С. Елагин, Е. А. Аникевич. – Санкт-Петербург, 2022. – С. 589–593.

5. Арзуманян Ю. В. Модели учебных программ для задач оптимизации при конструировании индивидуальных образовательных траекторий / Ю. В. Арзуманян, М. Б. Вольфсон, А. А. Захаров, Г. Р. Катасонова, А. Д. Сотников // В сборнике: Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании. сборник научных статей: в 4х томах. – Санкт-Петербург, 2021. – С. 330–335.

6. Сотников А. Д. Анализ современной системы образования на основе доменной модели инфокоммуникаций / А. Д. Сотников, Г. Р. Катасонова, Е. В. Стригина // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 2-26. – С. 5930–5934.

УЧЕБНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ КУРСА «СТРУКТУРЫ И АЛГОРИТМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ»

А. Е. Сотников, И. Е. Воронина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача создания обучающего программного обеспечения по курсу «Структуры и алгоритмы компьютерной обработки данных». Программные средства ориентированы на пошаговый разбор алгоритмов, сопровождающийся визуализацией. Рассматриваются 2 темы: односвязные и двухсвязные списки. Реализуются основные операции над списками. Все действия сопровождаются фрагментами программного кода. Предполагается расширение программы за счет включения новых разделов, посвященных структурам данных, обязательных для изучения.

Ключевые слова: структуры данных, алгоритмы, односвязные списки, двухсвязные списки, указатели, учебное приложение, визуализация, программирование, фреймворк .NET, IDE Microsoft Visual Studio 2022.

Введение

Визуальное сопровождение образовательных технологий помогает в освоении учебного материала. Но на сегодняшний день актуальность разработки учебных приложений, поддерживающих визуализацию предлагаемого материала, обосновывается еще и тем, что, к сожалению, у многих обучающихся отсутствует потребность и навык чтения необходимой «правильной» литературы: используются только интернет-источники. Следует отметить, что в области ИТ эти источники довольно часто невысокого качества или, того хуже, весьма сомнительного.

Учебный курс «Структуры и алгоритмы компьютерной обработки данных» является обязательным для профессиональной подготовки специалистов в области информационных технологий. В рамках данной дисциплины присутствует ряд обязательных тем. Списки, стеки, очереди – это то, с чего, как правило, данный курс начинается.

Разрабатываемое программное обеспечение позволяет пошагово ознакомиться с типовыми структурами данных и с типовыми действиями над ними. Действия сопровождаются фрагментами программного кода.

Предполагается расширение программного продукта по мере реализации работы с новыми предлагаемыми для изучения структурами. Необходимо отметить, что особую сложность представляет собой форма подачи учебного материала, следовательно, и организация интерфейса.

1. Цель и задачи разработки

Основная цель разработки заключается в создании доступного и понятного программного обеспечения (ПО), которое пошагово демонстрирует процесс построения и выполнения операций над структурами данных, чтобы студенты могли использовать представленный материал для самостоятельной работы и постараться повторить или улучшить представленные в примерах алгоритмы уже в своих задачах. Предполагаются две группы пользователей: преподаватели и студенты.

Первая часть ПО реализует работу со списками. Поддерживаются следующие операции:

1. Добавление элемента в начало списка.
2. Добавление элемента в конец списка.
3. Вставка элемента после заданного.

4. Вставка элемента перед заданным.
5. Удаление заданного элемента.

2. Алгоритмы

Для выбора визуального представления и алгоритмов был проанализирован ряд работ [1–3]. По результатам выбраны следующие решения:

- Алгоритм добавления в начало: создаётся новый узел, его ссылка указывает на первый элемент списка, после чего головная ссылка переставляется на новосозданный.
- Алгоритм добавления элемента в конец списка: создаём новый узел в конце списка, последний указывает на новый элемент, переставляется ссылка на последний новосозданный.
- Алгоритм вставки элемента после заданного: дойти до узла («якоря»), после которого нужно вставить, новосозданный узел должен указывать на следующий элемент после «якоря», а «якорный» узел должен указывать на новосозданный.
- Алгоритм вставки элемента перед заданным: нужно дойти до узла, перед которым хотим вставить («якорного» узла), создать новый узел, он должен указывать на «якорь», а узел перед «якорем» должен указывать на новосозданный.
- Алгоритм удаления элемента из списка: дойти до узла перед удаляемым, переставить его ссылку на следующий после удаляемого, освободить память удаляемого.

Визуальное представление без фрагментов программного кода малоэффективно, поэтому для лучшего понимания материала каждая операция должна сопровождаться соответствующими фрагментами реализации.

3. Пример работы

При открытии программы открывается меню выбора типа данных (рис. 1).

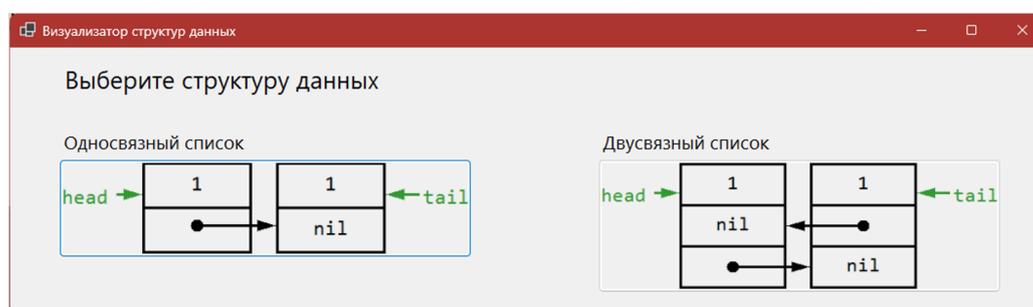


Рис. 1. Окно выбора структуры данных

После выбора темы «Односвязный список» открывается форма для работы с односвязным списком, на которой расположены элементы управления. Перечислены основные виды указателей, используемые в алгоритмах, описание структуры данных. Пользователь может выбрать операцию, режим визуализации. Далее он вводит операнд (число), с которым будет выполняться операция удаления или вставки, и нажимает на кнопку запуска отрисовки (рис. 2). Если выбран режим отрисовки по шагам, то пользователь переходит на следующий шаг путем нажатия зелёной кнопки, расположенной в центре окна. При выборе режима с задержкой, этапы будут демонстрироваться самостоятельно после заданного пользователем промежутка времени.

Для возврата в меню выбора типа данных нужно закрыть форму. Для перехода к двусвязному списку нужно выбрать тему «Двусвязный список». Визуальное сопровождение операции включает в себя и отображение фрагментов программного кода, а также описание структуры данных. Кроме того, выполнение текущей операции сопровождается выделением цветом.

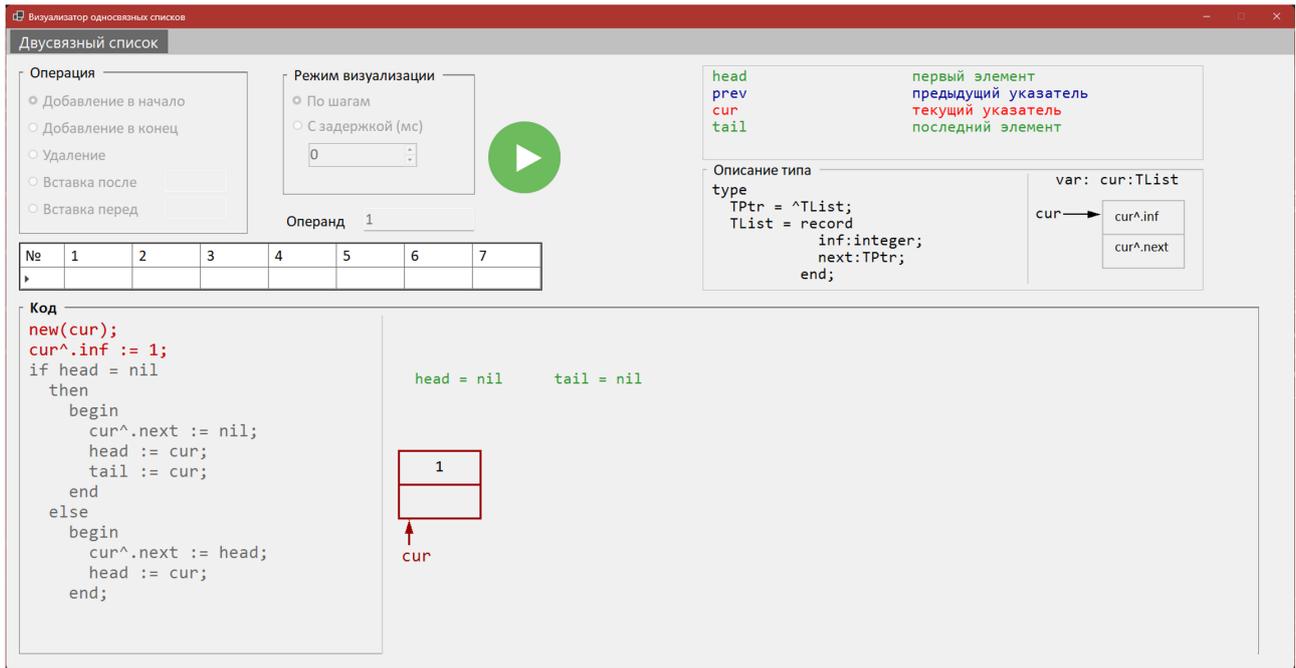


Рис. 2. Односвязный список

Для двухсвязных списков используются те же элементы управления, что, безусловно, упрощает использование программы. Меняется лишь описание структуры данных: справа вверху будут изменённые описания типа и визуальное представление элемента (рис. 3).

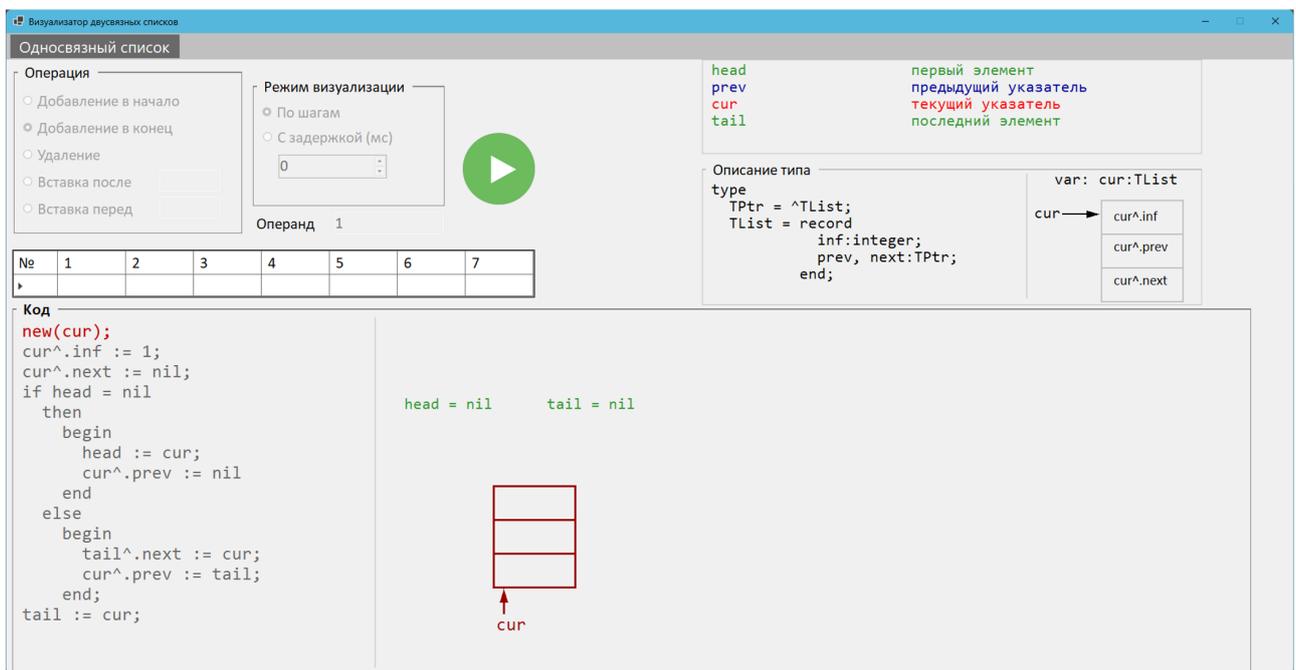


Рис. 3. Двухсвязный список

4. Технические аспекты разработки

В качестве основной технологии разработки был выбран фреймворк .NET. В частности, использованы возможности .NET для создания проектов Windows Forms, которые идеально подходят для задач, связанных с пользовательским интерфейсом.

Для реализации применялся IDE Microsoft Visual Studio 2022.

В ходе разработки потребовалось создать новые компоненты:

- CustomGroupBox — компонент для группировки элементов с возможностью указания заголовка;
- BorderPanel — компонент для создания панели с рамкой;
- InfoPanel — компонент для вывода информации о указателях;
- ListPanel — компонент для отрисовки границы внутри панели;
- TypePanel, DoublyLinkedListTypePanel — компоненты для вывода информации о типе данных.

Следует заметить, что визуальное представление компонентов потребовало значительной проработки, это касалось и расположения элементов на экране для наилучшего восприятия и визуализации. Задача кажется простой только на первый взгляд: для эффективной работы пользователя пришлось проанализировать варианты действий, которые должны быть минимальными, но при этом понятными.

Заключение

Разработанная часть обучающего приложения позволяет просто и доступно продемонстрировать принципы работы и внутреннее представление двухсвязных и односвязных списков.

Для того, чтобы проверить правильность выбранного подхода, необходимо было представить разработанное программное обеспечение пользователям и получить их оценку. Демонстрация программного продукта студентам первого курса показала, что интерфейс понятный, пояснения удачные, последовательная отрисовка действительно помогает лучше понять операции над списками.

Программный продукт подразумевает своё расширение, ближайшие цели — это представление работы с такими структурами данных как стеки, очереди, деревья, а также добавление примеров использования структур данных для решения практических задач.

Литература

1. Программирование в среде Turbo Pascal 7.0/ А. И. Марченко , Л. А. Марченко. Под ред. Тарасенко В. П. – 6-е изд., стереотипное, юбилейное. – К. Век+, 2000. – 464 с.
2. Вирт Н. Алгоритмы с структуры данных / Н. Вирт ; пер. с англ. Д. Б. Подшиваловой. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург : Нев. диалект, 2001. – 352 с.
3. Прикладные структуры данных и алгоритмы. Прокачиваем навыки. – СПб. : Питер, 2024. – 512 с.

ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ СТУДЕНЧЕСКИХ ОЛИМПИАД ПО ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЮ, ПОСВЯЩЕННЫХ ЮБИЛЕЙНЫМ ДАТАМ

О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева

Воронежский государственный университет

Аннотация. Приводится обзор студенческих олимпиад по информатике и программированию, проводимых факультетом прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, посвященных юбилейным датам. Отмечается вклад спонсоров и компаний, осуществляющих информационную поддержку, в организацию и проведение олимпиад.

Ключевые слова: информатика и программирование, студенческие соревнования, информационная поддержка, спонсоры.

Студенческие олимпиады по информатике и программированию являются традицией на факультете ПММ ВГУ, составной частью процесса обучения и надежной платформой для профессионального обучения будущих специалистов.

Начиная с 2000 года организованы и проведены 31 студенческая олимпиада [4], многие из которых посвящены знаменательным событиям.

Олимпиада первокурсников, проведенная 20–22 сентября 2000 года, была посвящена 70-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники Российской Федерации, доктора физико-математических наук, профессора, одного из основателей факультета прикладной математики, информатики и механики (ПММ ВГУ), основателя Воронежской научной школы теории пластичности Дюиса Даниловича Ивлева.

В этом же 2000 году, 15–18 апреля в рамках международной конференции «Математика. Образование. Экология. Гендерные проблемы» совместно с Воронежским отделением ассоциации «Женщины в науке и образовании» проведена **Международная студенческая олимпиада по информатике**. Она была посвящена пятилетию межрегиональной ассоциации «Женщины в науке и образовании». В олимпиаде соревновались студенты 1–3 курсов математического, физического факультетов, факультета ПММ ВГУ, а также студенты Воронежского государственного педагогического, Воронежского государственного архитектурно-строительного университетов, Воронежской государственной технологической академии, курсанты Воронежского института МВД РФ, Воронежского авиационно-инженерного института [1]. Спонсоры студенческой олимпиады 2000 года по информатике: ООО «Рет», «Релэкс», «НОКС», «Триэль», ТД «Финист», Испанская косметическая фирма «Ninelle», «Oriflame» (Швеция), профессиональный союз учащейся молодежи Воронежской области «Поколение», газета «Молодой коммунар».

Межфакультетская олимпиада по информатике, посвященная «Дню факультета ПММ» проведена 16 марта 2002 года. **Спонсоры:** ООО «Рет», «Виват», ЗАО «Интелком», ТД «Финист», Испанская косметическая фирма «Ninelle», фонд С.Г. Крейна, Межрегиональная ассоциация «Женщины в науке и образовании», кафедры факультета ПММ ВГУ: кафедра математических методов исследования операций (ММИО), кафедра математического обеспечения ЭВМ (МО ЭВМ).

Региональная студенческая интернет-олимпиада, проведенная факультетом ПММ ВГУ в мае 2003 года, посвящена **85-летию Воронежского государственного университета и 10-летию Ассоциации «Женщины в науке и образовании»** [1]. Олимпиаду поддерживал грант областной администрации Воронежской области «Разработка научно-методических основ построения региональной информационно-образовательной среды Виртуального университета (на базе Воронежского государственного университета)». **Спонсоры** олимпиады 2003 года:

ЗАО «Релэкс», ООО «ОСs-Юг», косметическая фирма «Ninelle» (Испания), косметическая фирма «Лонда-Колор» (Германия), издательское предприятие «Радио Софт» (Москва). **С информационной поддержкой** выступили: газеты «Компьютерра-регион», «Воронежский государственный университет», «Факультет ПММ».

Региональная открытая школа-олимпиада по программированию и компьютерному моделированию номер VII проведена 16–17 сентября 2006 года. Она была посвящена **памяти первого декана факультета ПММ ВГУ профессора Быковцева Геннадия Ивановича** [2]. Эта олимпиада состоялась в соответствии с приказом министерства образования и науки № 285 от 14.11.06 «О награждении победителей олимпиады». **Спонсоры** олимпиады VII: Чернозёмный альманах научных исследований (главный редактор В. Н. Чурова, выпускница факультета ПММ ВГУ), Международная школа-семинар «Современные проблемы механики и прикладной математики» (председатель оргкомитета декан факультета ПММ ВГУ А.И. Шашкин). **Информационную поддержку** оказывали: газета «Воронежский университет», радио «Маяк-Воронеж», «104FM», «Воронеж-Media».

Всероссийская студенческая олимпиада «Информатика. Программирование. Информационные технологии» проводилась факультетом ПММ ВГУ 20–23 ноября 2008 года. Она была посвящена **60-летию Российской информатики** и организована по приказу Федерального агентства по образованию № 261 от 31.03.2008 в рамках реализации национального проекта «Образование» [3]. **Спонсорскую поддержку** победителям и участникам олимпиады оказали компании «О-Си-Эс-Юг», «Релэкс», «Рет», «MuranoSoft», «DataArt», «Информсвязь-Черноземье», издательство «Питер-Воронеж», «Три-Кота-Ж».

Организаторы и участники олимпиады, посвященной 60-летию Российской информатики, благодарны **информационной поддержке** компаний: «41 канал ТВЦ Воронеж», ТВЦ «Губерния», «Воронеж-Медиа», журнал «ITerra», газеты «Воронежский университет», «Молодой коммунар».

Всероссийская студенческая олимпиада «Информатика. Программирование. Информационные технологии» проведена в сентябре 2011 года. Эта олимпиада посвящена 425-летию со дня основания города Воронежа [4]. Олимпиада 2001 года была организована согласно приказу министерства образования РФ № 167 от 16.03.11. **Генеральным спонсором** олимпиады выступила компания «Рет». **Спонсорами** были «DataArt», «Релэкс», «Информсвязь-Черноземье», «Сименс АйТи Солюшенс энд Сервисез», «ИНЕТЭРА», «Mail.ru group», «Murano Soft», «Парус», «Три-Кота-Ж», «Мир ПК», «Открытые системы». **Информационную поддержку** оказали: журнал «Мир ПК», газета «Воронежский университет», «Воронеж-Медиа», телеканал «ТНТ», Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», организованная факультетом ПММ ВГУ.

В сентябре 2012 года организована и проведена **открытая интернет-олимпиада по программированию**. **Спонсорами** олимпиады были компании, руководителями которых выпускники факультета ПММ: «Вистар» (директор Пономарев Г.В.), ЗАО НПП «Релэкс» (директор, кандидат технических наук Бойченко И.А.), ООО «Рет» (директор по экономическому развитию, кандидат технических наук Лапыгин Д.Р.).

Открытые on-line соревнования студентов вузов Черноземья проведены в ноябре 2013 года. Они были посвящены **95-летию Воронежского государственного университета** [5, 6]. **Организаторами** соревнований являются их **спонсоры**: ЗАО НПП «Релэкс» (директор Бойченко И. А.), «DataArt» (директор Воронежского отделения Шинкаренко А.Ю.), «Рет» (директор по экономическому развитию Лапыгин Д. Р.), «T-Systems» (генеральный директор Воронежского филиала Дербушев А.), ПММ ВГУ (декан факультета Шашкин А. И.).

Соревнования студентов по информатике и программированию, посвященные **25-летнему юбилею их организатора ЗАО НПП «Релэкс»** проведены 9–16 декабря 2015 года факульте-

том ПММ ВГУ и ЗАО НПП «Релэкс». **Спонсорами** этих соревнований были факультет ПММ ВГУ и ЗАО НПП «Релэкс».

В организации и проведении олимпиад, которые организовывал факультет ПММ ВГУ, существенную финансовую и информационную поддержку оказывали **ведущие компьютерные фирмы Воронежа**:

Релэкс (генеральный директор Бойченко И.А., кандидат технических наук, выпускник факультета ПММ);

Рет (директор по экономике Лапыгин Д.Р., выпускник факультета ПММ, неоднократный призер региональных студенческих олимпиад по информатике).

Соревнования по информатике и программированию, посвященные **выдающемуся математику с мировым именем С. Г. Крейну** проведены 16 декабря 2017 года [7]. Организаторы и спонсоры: факультет ПММ ВГУ, выпускники факультета ПММ ВГУ, успешно работающие в известных компьютерных фирмах, компьютерная компания «Рет».

В декабре 2017 года проведены согласно проекта Российского фонда фундаментальных исследований 17-31-10301 мол-г **соревнования первокурсников вузов в преддверии столетия ВГУ** [8]. **Организаторы и спонсоры** этих соревнований факультет ПММ ВГУ и компьютерная фирма «Рет».

Посвященные **100-летию ВГУ соревнования по информатике и программированию первокурсников вузов г. Воронежа** проведены факультетом ПММ ВГУ в октябре 2018 года. Спонсоры этих соревнований: компания «Рет» (директор по экономическому развитию, кандидат физико-математических наук, с отличием закончивший факультет ПММ ВГУ Лапыгин Дмитрий Рудольфович); компания «DataArt» (директор Воронежского филиала Федоров Михаил Геннадьевич, выпускник физического факультета ВГУ); компания «Вистар» (генеральный директор Пономарев Геннадий Викторович, выпускник факультета ПММ ВГУ).

Факультет ПММ ВГУ организовал 2 декабря 2021 года (в рамках года науки и технологий) **олимпиаду по информатике и программированию первокурсников воронежских вузов**. **Спонсоры** этой олимпиады факультет ПММ ВГУ и корпорация Digital Soft, директор по развитию которой Азнаурьянц Александр Александрович (его родители выпускники факультета ПММ ВГУ).

Многолетний опыт проведения студенческих соревнований по программированию позволяет выделить их важную роль в изучении информатики и программирования, выработке у студентов профессиональных навыков будущих IT-специалистов.

Литература

1. *Гудович И. Г.* Отмечая пятилетие Воронежского отделения Ассоциации «Женщины в науке и образовании» / И. Г. Гудович, О. Ф. Ускова // Математика. Образование. Экология. Гендерные проблемы: Междунар. конф., Воронеж, 22-27 мая 2000 г. : Материалы конф. – 2001. – Т. 2. – С. 5–13.

2. *Ускова О. Ф.* О некоторых итогах интернет-олимпиады по информатике, посвященной памяти профессора Г. И. Быковцева / О. Ф. Ускова, О. Д. Горбенко // Современные проблемы механики и прикладной математики : сб. тр. междунар. шк.-семинара, Воронеж 17–19 сент. 2007 г. – Воронеж, 2007. С. 97–102.

3. *Поляков А. Е.* Профессиональная направленность олимпиадных заданий третьего тура Пятой Всероссийской студенческой олимпиады по информатике / А. Е. Поляков, О. Ф. Ускова, О. Д. Горбенко // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна. – 2008 : тез. докл. Воронеж, 2008. С. 113–115.

4. *Ускова О. Ф.* Воронежский государственный университет – головной вуз проведения Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информацион-

ные технологии» / О. Ф. Ускова, О. Д. Горбенко, А. И. Шашкин // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования. Педагогическая секция : сб. ст. V Междунар. конф., Воронеж, 11–16 сент. 2012 г. – Воронеж, 2012. – С. 154–156.

5. Студенческие соревнования по информатике и программированию, посвященные 95-летию ВГУ / И. А. Бойченко, В. М. Мельников, О. Ф. Ускова, А. И. Шашкин // Информатика : проблемы, методология, технологии : материалы 14 Международной научно-методической конференции, 6-8 февраля 2014 г., г. Воронеж. – Воронеж, 2014. С. 59–63.

6. Сотрудничество ВГУ и mail.ru group в организации студенческих соревнований по информатике и программированию, посвященных 95-летию ВГУ / О. Ф. Ускова, А. В. Поцюс, А. И. Шашкин, В. В. Провоторов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014) : сборник трудов 7-й Международной конференции, Воронеж, 14-21 сентября 2014 г. – Воронеж, 2014. – С. 381–384.

7. Столетию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна посвящается / И. А. Бойченко, К. Е. Селезнев, В. М. Мельников, О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, А. И. Шашкин // Информатика : проблемы, методология, технологии. Информатика в образовании : материалы 18-й Международной школы-конференции, Воронеж, 8–9 февраля 2018 г. : в 7 т. – Воронеж, 2018. – Т. 7. – С. 13–17.

8. Соревнования по информатике первокурсников воронежских вузов в преддверии столетия Воронежского государственного университета / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, А. И. Шашкин, Д. Р. Лапыгин // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2018) : сборник трудов 11-й Международной конференции, Воронеж, 18-24 сентября 2018 г. – Воронеж, 2018. – С. 281–284.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КУРСЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

В. Н. Худенко, Е. В. Деркач

Балтийский федеральный университет имени И. Канта

Аннотация. Описывается опыт использования оригинальных анимаций при изучении раздела «Кривые второго порядка» курса «Аналитической геометрии» изучаемый студентами информационных направлений в Балтийском федеральном университете им. И. Канта. Приведены результаты эксперимента по внедрению демонстраций анимационных роликов на первом курсе университета.

Ключевые слова: динамическая визуализация, анимации, аналитическая геометрия, эллипс, гипербола, парабола.

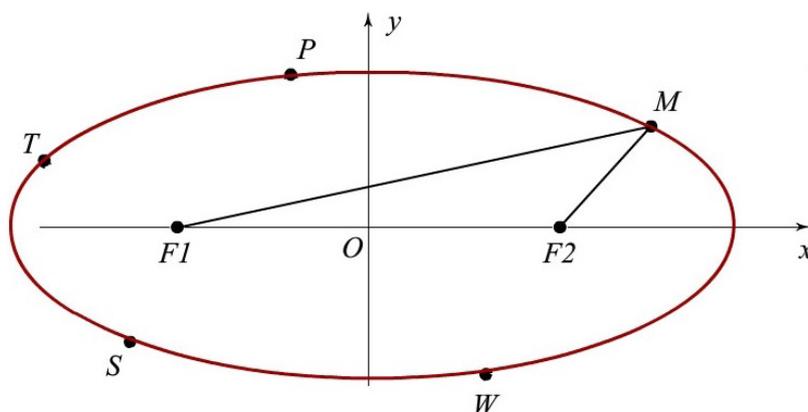
В последнее время в преподавании математики достаточно часто применяют динамическую визуализацию, т. е. использование заранее созданных анимаций, где математические объекты двигаются или изменяются с течением времени или при изменении параметров. При изучении аналитической геометрии значительную роль играет рассмотрение кривых второго порядка (их внешнего вида, свойств и особенностей построения). Для улучшения восприятия этого раздела аналитической геометрии в Балтийском федеральном университете им. И. Канта применяется, в том числе, систематическое применение динамической визуализации.

С помощью программы «Adobe Animate» были созданы видео анимации в которых излагались построение эллипса (https://vkvideo.ru/playlist/-225595720_27/video-225595720_456239293?linked=1), гиперболы (https://vkvideo.ru/playlist/-225595720_27/video-225595720_456239302?linked=1) и параболы (https://vkvideo.ru/playlist/-225595720_27/video-225595720_456239307?linked=1), основные свойства этих кривых, а также некоторые типовые задачи с кривыми второго порядка. Вот примеры кадров из этих анимаций

Построение эллипса

Определение

Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть заданная постоянная величина, называют эллипсом.



F_1, F_2 - фокусы
 $MF_1 + MF_2 = const$

$$MF_1 + MF_2 = PF_1 + PF_2 = TF_1 + TF_2 = SF_1 + SF_2 = WF_1 + WF_2 = const$$

Деркач Е.В.

Рис. 1. Эллипс

Построение гиперболы. Определение.

Геометрическое место точек плоскости для которых разность расстояний до двух фиксированных точек есть величина постоянная, называют гиперболой.

F_1, F_2 - фокусы гиперболы

т. $M(x; y)$ принадлежит гиперболе

Из опр.: $MF_1 - MF_2 = \text{const}, MF_1 > MF_2$

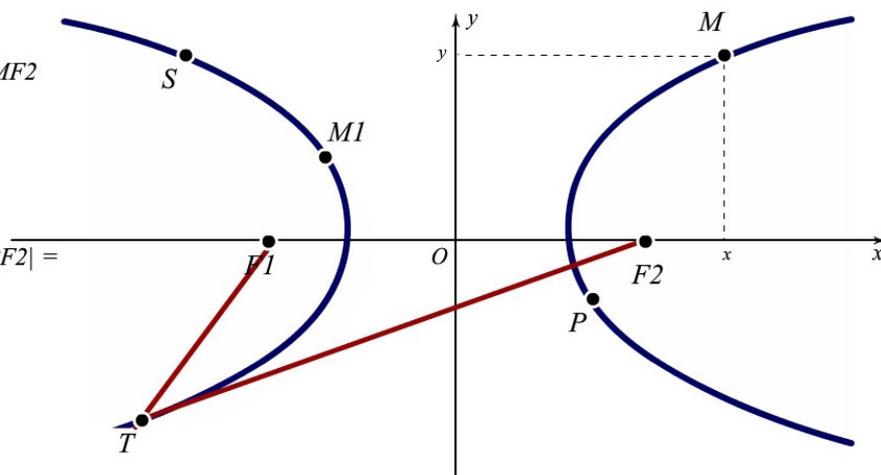
Для т. M_1 : $M_1F_1 < M_1F_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_1F_2 - M_1F_1 = \text{const}$

В общем виде: $|MF_1 - MF_2| = \text{const}$

$|MF_1 - MF_2| = |TF_1 - TF_2| = |PF_1 - PF_2| =$

$|SF_1 - SF_2| = |M_1F_1 - M_1F_2| = \text{const}$



Деркач Е.В.

Рис. 2. Построение гиперболы

Геометрические свойства параболы

1. Ox - ось симметрии параболы

$y = 0$ - ось параболы

2. $A(0; 0)$ - вершина параболы

3. $\rho(d; F) = p$ - фокальный параметр параболы

$d = -\frac{p}{2}$ - директриса параболы,

$F(\frac{p}{2}; 0)$ - фокус параболы

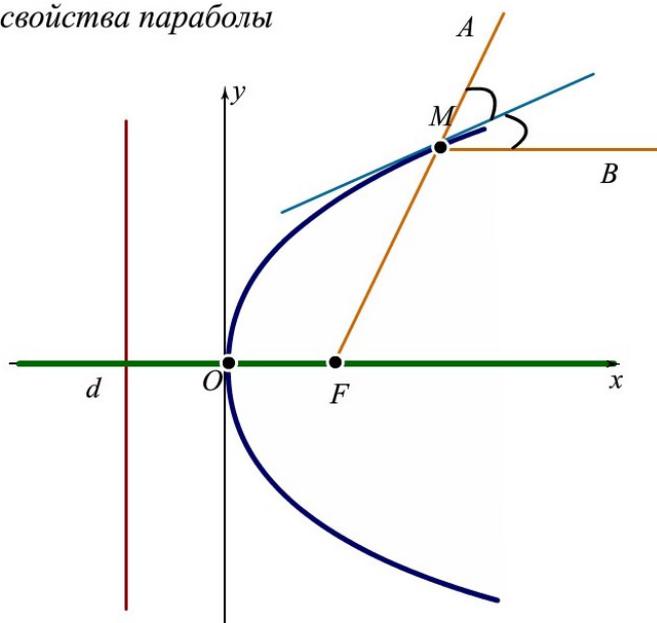
4. $\mathcal{E} = \frac{MF}{MD} = 1$

5. Оптическое свойство параболы:

l - касательная к параболе в т. M

l - биссектриса угла, смежного углу FMC

$l: y - y_0 = p(x + x_0)$ - уравнение касательной



Деркач Е.В.

Рис. 3. Геометрические свойства параболы

Следует отметить, что все анимации выложены в сообщество «Мультимедийные материалы по отраслям математики» (<https://vk.com/club225595720>), в результате чего студенты имеют возможность неоднократно обращаться к этим материалам. Кроме того, такая практика имеет просветительский аспект. Статистика говорит о том, что материалы просматриваются как в городах России и в ряде зарубежных стран.

Помимо явных плюсов (доступность, наглядность, работа зрительной памяти) применение динамической визуализации имеет и негативную составляющую: опасность поверхностного подхода к изучаемому материалу. Нивелировать негатив позволяет тесная связь глубоким теоретическим обоснованием рассматриваемых вопросов.

Для изучения эффективности применения динамической визуализации при изучении кривых второго порядка в курсе аналитической геометрии был проведен эксперимент. Были выбраны приблизительно одинаковые по успеваемости группы студентов. Одна контрольная, в которой не применялась динамическая визуализация, а вторая – для эксперимента. В обеих группах проводилась вводная контрольная работа, показавшая приблизительно равный уровень знаний. Вторая контрольная работа проводилась после изучения темы «кривые второго порядка», причем в контрольной группе метод динамической визуализации не применялся.

Результаты итоговой контрольной работы

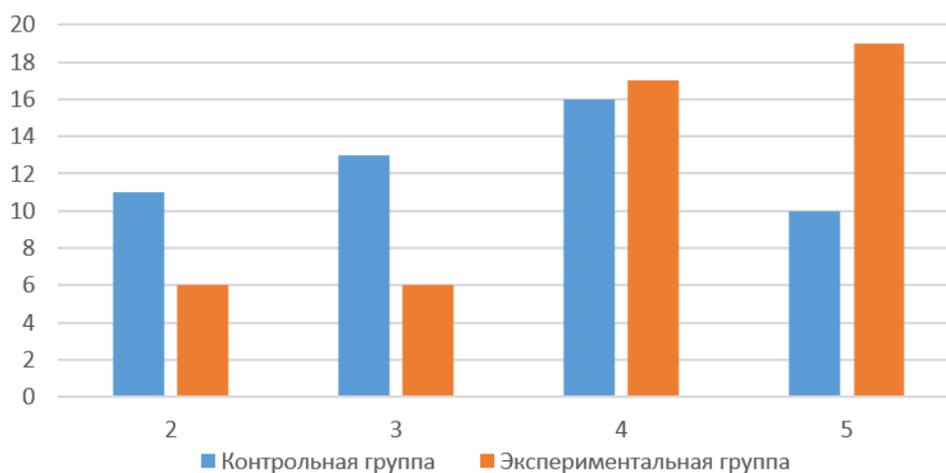
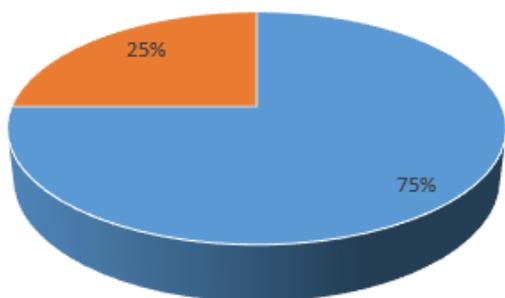


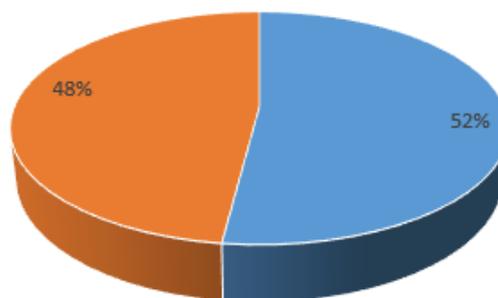
Рис. 4. Результаты итоговой контрольной

Оценки экспериментальной группы



■ Положительные оценки ■ Отрицательные оценки

Оценки контрольной группы



■ Положительные оценки ■ Отрицательные оценки

Рис. 5. Круговые диаграммы итоговой контрольной

Результаты эксперимента, говорят об эффективности применения динамической визуализации, подкрепленного теоретическими выкладками, для изучения кривых второго порядка.

Заключение

Таким образом приходим к выводу, что применение динамической визуализации при изучении аналитической геометрии повышает качество обучения: облегчает усвоение абстрактных геометрических понятий за счёт наглядного представления процессов, формирует интуитивное понимание связей между геометрическими объектами и стимулирует исследовательскую активность обучающихся.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-02-2025-1789 от 7 марта 2025 года)

Литература

1. Худенко В. Н. Об использовании динамической визуализации для доказательства теорем математического анализа / В. Н. Худенко, С.А. Ишанов, Е. А. Ровба, // Сборник трудов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2022. – С. 1302–1304

2. Квитко Г. В. Об использовании динамической визуализации учебного материала в преподавании аналитической геометрии и алгебры в условиях смешанного обучения / Е. П. Ставицкая, И. С. Маклахова, С. А. Дёмин // Сборник трудов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2021. – С. 1484–1487.

3. Худенко В. Н. Использование динамической визуализации учебного материала в процессе преподавания математики для студентов физико-технических направлений / В. Н. Худенко, Е. А. Ровба, Е. П. Новикова, И. С. Маклахова // Сборник трудов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2017. – С. 1391–1393.

4. Худенко В. Н. К вопросу об использовании динамической визуализации учебного материала в процессе преподавания теории функций комплексного переменного / В. Н. Худенко, Е. А. Ровба, И. С. Маклахова // Сборник трудов VIII международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». – Воронеж, 2015. – С. 377–379.

5. Худенко В. Н. К вопросу об использовании динамической визуализации учебного материала в процессе преподавания математики для студентов инженерных направлений / В. Н. Худенко, Е. А. Ровба, И. С. Маклахова // Сборник трудов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». – Воронеж, 2016. – С. 368–370.

К ВОПРОСУ О ПОВЫШЕНИИ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ К ОГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ

В. Н. Худенко, Д. В. Прокудин

Балтийский федеральный университет имени И. Канта

Аннотация. Рассматриваются недостатки при подготовке учащихся к Основному государственному экзамену по информатике, описывается опыт создания интерактивного генератора заданий для индивидуальной подготовки к такому экзамену.

Ключевые слова: основной государственный экзамен, информатика, цифровая грамотность, генерация заданий, справочная информация, алгоритмическое мышление.

Как известно, согласно государственным образовательным стандартам, одним из важнейших компонентов основного общего образования является формирование алгоритмического мышления и формирование компетенций по решению задач с использованием программирования. Важной составляющей частью этой работы является подготовка к основному государственному экзамену по информатике.

По данным ФИПИ, несмотря на рост числа сдающих этот экзамен, отмечается достаточно низкий средний балл по результатам экзамена. Можно указать ряд причин этой негативной тенденции [1–4].

Прежде всего ОГЭ по информатике находится «в тени» своего «старшего брата» ЕГЭ по информатике, который является обязательным при поступлении в вузы по IT направлениям и специальностям, в результате учащиеся сталкиваются с нехваткой или недостаточно качественными и устаревшими материалами для подготовки к экзамену. В результате отмечается отсутствие систематической практики в решении экзаменационных задач, когда учащиеся решают редко и выборочно, вместо регулярных тренировок с разбором ошибок. Следствие чего является слабое алгоритмическое мышление, выражающееся в трудности при построении последовательности действий, отсутствие опыта в разбиении на подзадачи, а также затруднение в выборе эффективного подхода. Ряд недостатков носит субъективный характер: переоценка зубрёжки, неумение распределять время, как для подготовки, так и при прохождении тестовых заданий, а также ряд других. Не способствуют преодолению недостатков отсутствие или устаревшие справочно-информационные материалы, которые зачастую еще являются платными.

Снизить остроту описанных проблем или полностью их устранить помогает приложение «ОГЭ 2025 — Тренажер» разработано в Балтийском федеральном университете им. И. Канта для системной подготовки учащихся к сдаче Основного государственного экзамена по информатике (<http://cloud.mail.ru/public/z2xz/VNvGyRYk>).

Основной задачей приложения является моделирование аналогов реальных экзаменационных задач. Для достижения этой цели используется алгоритм генерации вариантов, соответствующих спецификациям ФИПИ. Это позволяет создавать не повторяющиеся, уникальные примеры, что позволяет избежать механического запоминания ответов и способствует более осмысленному пониманию темы.

Каждое задание привязано к конкретному элементу содержания, например, «Кодирование и декодирование информации» или «Запросы для поисковых систем с использованием логических выражений». Преподаватель может рекомендовать определенные номера для домашней работы, ориентируясь на текущие темы урока.

Типичный экран для выполнения задания в приложении «ОГЭ 2025 – Тренажер», представлен на рис. 2 и содержит стандартные элементы интерфейса для взаимодействия учащегося с приложением. Экран содержит текстовое поле для ввода текстовых или числовых ответов, кнопку «Проверить» для начала проверки ответа.



Рис. 1. Интерфейс приложения

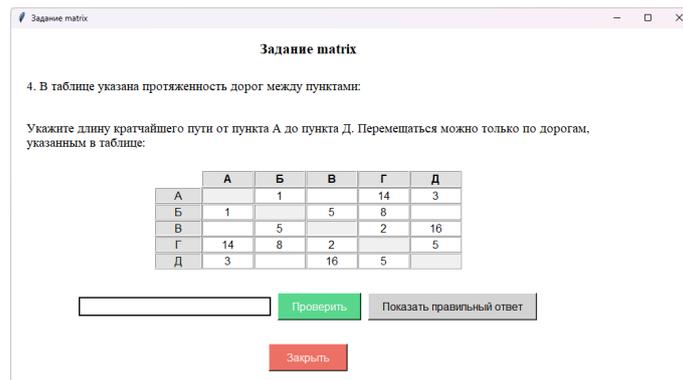


Рис. 2. Окно выполнения задания

Кнопка «Показать правильный ответ» служит для показа правильного ответа и подсказки.

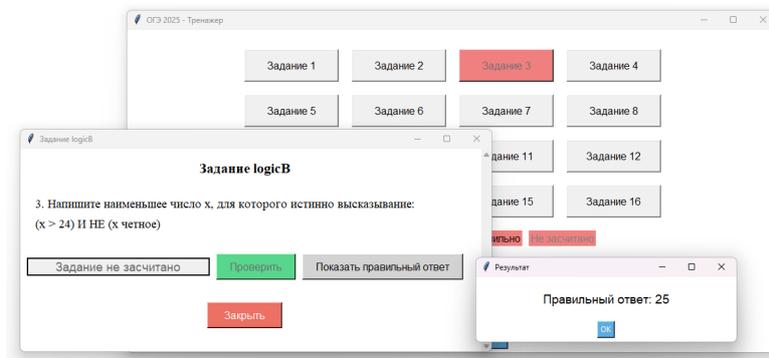


Рис. 3. Использование подсказки

В приложении уделяется внимание ко всем заданиям, в том числе и тем, генерация которых невозможна. Например, на использование поисковой системы операционной системы для поиска файлов и последующего извлечения нужной информации. Для решения этой задачи в силу модульной системы приложения в два клика добавляется новый пример, полностью имитирующий экзаменационное задание.

В результате использования дополнительных библиотек осуществлена генерация заданий на анализ информации (например, для анализа графов)

Решены задачи безопасности и доступности: после установки приложения, которое является кроссплатформенным, оно не требует обращения к сети Интернет, все используемые файлы либо хранятся локально, либо генерируются во время работы.

Был проведен эксперимент на базе одного из лучших учебных заведений г. Калининграда — лицея № 23, который показал устойчивое улучшение знаний по информатике, как следствие применения данного тренажёра.

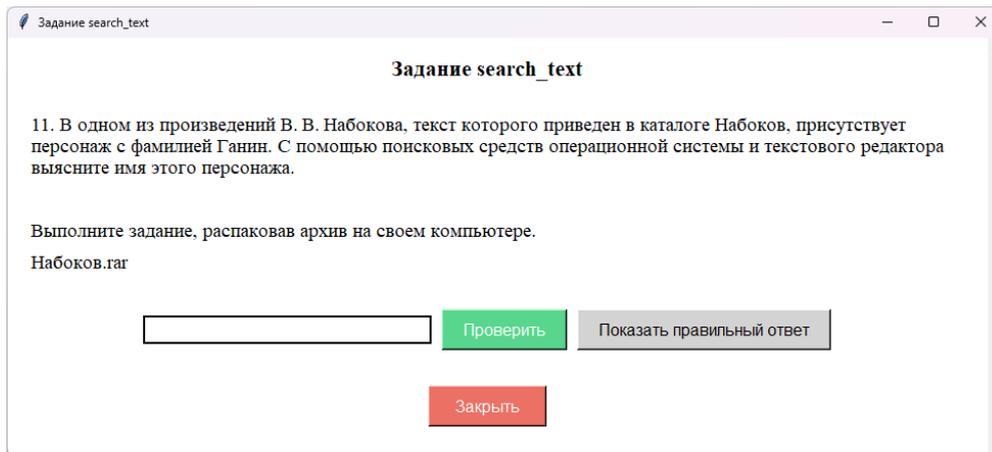


Рис. 4. Использование поисковой системы и текстового редактора

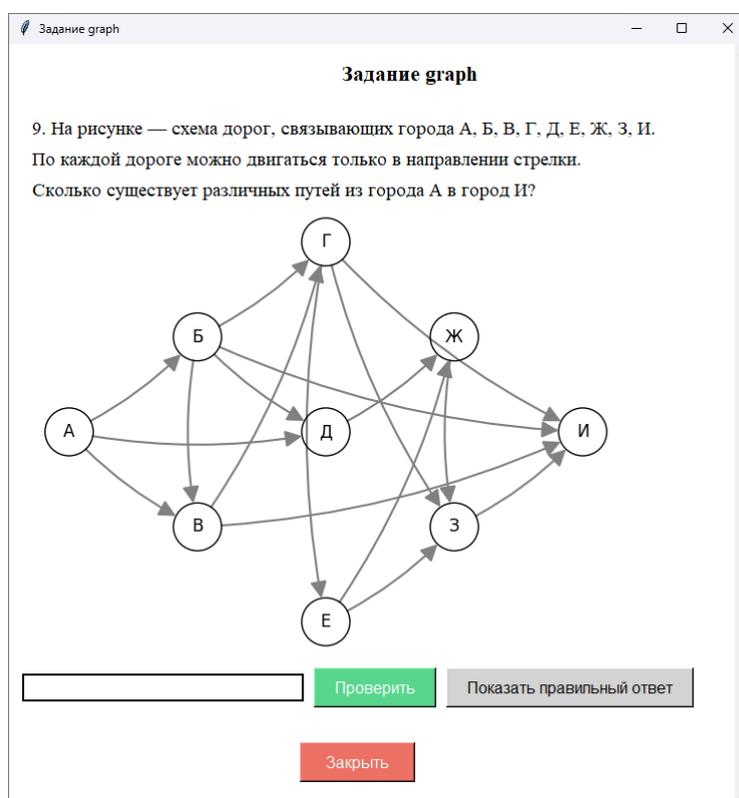


Рис. 5. Анализ информации, представленной в виде схем

Заключение

Таким образом, разработанное приложение создает эффективный инструмент для подготовки к ОГЭ по информатике учащиеся получают персонализированный тренажёр, а преподаватель информатики — инструмент, позволяющий отслеживать прогресс. Следует отметить что приложение, за счет интерактивности, превосходит стандартные учебники. Расширенное применение приложения позволит преодолеть проблемы при подготовке к ОГЭ по информатике.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-02-2025-1789 от 7 марта 2025 года).

Литература

1. *Андреева Е. В.* Современные подходы к преподаванию информатики // Информатика и образование. – 2023. – № 5. – С. 3–10.
2. *Босова Л. Л.* Цифровые образовательные ресурсы по информатике // Народное образование. – 2023. – № 3. – С. 112–118
3. *Горячев А. В.* Подготовка к ОГЭ по информатике: проблемы и решения // Школьные технологии. – 2023. – № 2. – С. 78–85.
4. *Абрамов С. А.* Цифровые инструменты подготовки к ОГЭ // Современные проблемы информатизации образования: материалы международной конференции. – М., 2023. – С. 45–52.

ЦИФРОВОЙ КОРЕНЬ, ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ

В. И. Штука

Владивостокский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена процессу определения универсального признака делимости, связи его с цифровым корнем числа, а также особенностей представления периодических дробей с точки зрения его приложения в образовании, основанном на принципах вовлечённости и сопричастности к открытиям.

Ключевые слова: цифровой корень, делимость, периодические дроби, теория чисел.

Введение

Кажется открыть или изобрести что-то новое сейчас — явление из разряда фантастики. Однако, всегда имеет место Случай и благодаря Ему многое может измениться. Рассмотренные ниже моменты, связанные с открытиями, подобными открытию знаменитого закона Архимеда¹, могут быть с успехом применены в делах популяризации математики и другой исследовательской деятельности.

Числа, которым мы часто не придаём значения, сопровождают человека на протяжении всей жизни. Числа, которые великий индийский математик Сриниваса Рамануджан называл своими друзьями (по воспоминаниям английского математика Годфри Харолда Харди), у каждого из которых есть свои свойства и уникальные особенности — в повседневности это даты, различные цифровые идентификаторы типа номеров телефонов, страховых полисов и так далее.

1. История «открытия»

Так, при самых рядовых обстоятельствах более десяти лет назад, во время прогулки, состоявшейся в конце августа месяца, когда речь зашла о ближайших празднованиях, вдруг вспомнилась интересная дата 9.9.1989 — день, месяц и год моего рождения по Григорианскому календарю. Дата эта имеет интересную особенность — сумма всех её цифр равна 81, а сумма уже этих цифр равна 9! Таким образом за два прохода (две итерации) рассчитывается цифровой корень [1] числа 991989. Забавно, что кратные девяти числа в первой сотне (9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99) обладали тем же признаком — сумма их цифр равна девяти!

На ум сразу же пришло вспомнить признаки делимости на другие числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 и так далее. Ни один из них не обладал таким потрясающим свойством, как признак делимости на 9, а признак делимости на 11 был сложнее и хитро устроен (нужно суммировать чётные и нечётные цифры, а затем вычислять разность), не говоря уже об остальных [2].

Мысли во время множества отчаянных попыток выявить универсальный признак делимости натуральных чисел в первые минуты не приносили никаких значимых результатов до того момента, пока не пришло понимание того, что мыслить приходилось исключительно в рамках десятичной системы счисления. Вообще комфорт, к которому человек так быстро привыкает, часто делает его своим заложником. Обычно удобство противопоставляется свободе и безопасности — особенно остро эти категории проявляют себя в вопросах распространения и использования программного обеспечения, развития нейронных сетей, в сфере так называемого искусственного «интеллекта», а также в вопросах языка, летоисчисления, систем расчётов, к которым мы привыкли и не обращаем на них пристального внимания, как и не обращаем вни-

¹Закон, согласно легенде, был открыт во время принятия ванны и сопровождался криком «Эврика»

мание на то, как именно мы дышим или как двигаем своими конечностями — это для нас вещи из разряда обыденных и само-разумеющихся.

Тем не менее, итог мозгового штурма оказался прогнозируемым, а универсальный признак делимости заново «открыт» и предварительно сформулирован следующим образом:

Чтобы узнать делится ли число M на число N , необходимо получить цифровой корень числа M в системе счисления с основанием $N+1$, сравнив его с N .

Здесь важно привести несколько примеров (основание систем счисления записано нижним индексом, а когда индекс отсутствует предполагается что запись ведётся в десятичной системе счисления):

- 1) $123456789_{10} \rightarrow 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 \rightarrow 4+5=9 \rightarrow$ делится на $9!$
- 2) $200070009_{10} \rightarrow 2+7+9=18 \rightarrow 1+8=9 \rightarrow$ делится на $9!$
- 3) $16_8 \rightarrow 1+6=7 \rightarrow$ делится на $7!$ Это число 14_{10} .
- 4) $26_8 \rightarrow 2+6=10_8 \rightarrow$ не делится на $7!$ Это число 22_{10} .
- 5) $123_4 \rightarrow 1+2+3=12_4 \rightarrow 1+2=3 \rightarrow$ делится на $3!$ Это число 27_{10} .
- 6) $123_3 \rightarrow 1+2+3=11_5 \rightarrow 1+1=2 \rightarrow$ не делится на $4!$ Это число 38_{10} .

Наличие нулей (см. пример 2), также как и порядок цифр никак не влияет на цифровой корень числа – такие выводы можно сделать на основании свойства коммутативности операции суммирования и проверить их в аудитории.

2. Универсальный признак делимости

Показательно здесь привести следующую таблицу (её желательно заполнить вместе с учащимися), содержащую цифровой корень числа M (левый столбец) в системах счисления с основанием $N+1$ (верхняя строка). Делимость числа M на число N обозначена символом «*».

Таблица

Цифровой корень числа M в системах счисления с основанием $N+1$

M	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1*	2*	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1*	1	3*	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1*	2*	1	4*	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	1*	1	2	1	5*	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	1*	2*	3*	2	1	6*	6	6	6	6	6	6	6	6
7	1*	1	1	3	2	1	7*	7	7	7	7	7	7	7
8	1*	2*	2	4*	3	2	1	8*	8	8	8	8	8	8
9	1*	1	3*	1	4	3	2	1	9*	9	9	9	9	9
10	1*	2*	1	2	5*	4	3	2	1	10*	10	10	10	10
11	1*	1	2	3	1	5	4	3	3	1	11*	11	11	11
12	1*	2*	3*	4*	2	6*	5	4	4	2	1	12*	12	12
13	1*	1	1	1	3	1	6	5	5	3	2	1	13*	13
14	1*	2*	2	2	4	2	7*	6	6	4	3	2	1	14*

Из этой таблицы даже чисто визуально можно обнаружить, что:

- Цифровой корень всегда находится в диапазоне от 1 до основания системы счисления;
- Все целые числа делятся на 1 — см. второй столбец (основание системы 2), чётные числа делятся на 2 — см. третий столбец (основание системы 3) и так далее.

• Нижняя левая часть (относительно главной диагонали) таблицы может быть использована для определения множителей числа M , которые отмечены в соответствующей строке символом «*», подобно решетку Эратосфена

Итак, более чётко с формальной точки зрения, универсальный признак делимости можно записать следующим образом:

Число M делится на число N без остатка, когда в системе счисления с основанием $N + 1$, его цифровой корень равен N .

Данное определение позволяет произвести дополнительную оптимизацию, подобно той, что сопровождает модифицированный алгоритм Луны [3], который используется для верификации², например, номеров банковских карт или почтовых отправлений.

Пояснение оптимизации лучше дать на примере числа, содержащего цифры от 1 до 9, которое для удобства запишем как 123456789_{10} : вначале сложим первые четыре цифры $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, и запомним «сухой» остаток от деления на 9, который равен 1, потом прибавим к нему ещё две цифры $1 + 5 + 6 = 12$, и вновь запомним «сухой» остаток — 3. Таким образом, последовательной прибавкой к остатку оставшихся цифр по одной станет понятно, что итоговым остатком станет крайняя цифра 9 (её вообще можно не учитывать в расчётах), которая и удовлетворит критерий делимости числа 123456789_{10} на 9.

По-другому оптимизацию можно организовать через поиск цифр-дополнений — это, например, пары цифр $1 + 8$, $2 + 7$, $3 + 6$, $4 + 5$, которые дают в сумме 9 и нивелируют вклад друг друга в цифровой корень, если нас интересует сам факт делимости одного числа на другое без остатка. Такой приём хорошо проявляет себя на больших числах, состоящих из нескольких десятков и даже сотен цифр, ввиду чего может быть применён к вычислительным задачам большой размерности. Здесь вполне уместно вспомнить знаменитую историю расчёта суммы чисел от одного до ста в исполнении тогда ещё семилетнего будущего «короля математиков» Карла Фридриха Гаусса, которую он произвёл с помощью подобной методики, чем очень удивил своего учителя Мартина Бартельса.

3. Периодические дроби

Связаны с понятием делимости и периодические дроби [4], которые часто вызывают непонимание и даже неприятие учащихся в силу того, что их тяжело использовать в расчётах. Записи десятичных чисел вида $4,13(46)$ или $5,(1659)$ крайне легко воспроизвести, учитывая тот факт что цифры в скобках повторяются бесчисленное количество раз, и их зачастую сложно преобразовать в обыкновенную дробь, не говоря уже о выполнении каких-либо действий с ними. А если необходимо ещё учитывать основание системы счисления, что тогда?!

Чтобы разобраться с периодическими дробями, нужно понять, как они появляются и сделать это проще всего, опять же, в десятичной системе счисления, для которой цифра 9 имеет (как описано выше) особый смысл. Элементарный период вида $0,(1)$ получается путём деления единицы на число 9, следующий период $0,(11)$ есть представление дроби $11/99 = 1/9$ и так далее. Конечно, в данном случае чётко видно, что $0,(1) = 0,(11) = 0,(111) = \dots$, но цель здесь преследуется крайне простая — показать что собой представляют элементарные периоды с увеличением числа значащих цифр в них. Здесь уже усматривается определённая закономерность, которую возможно сформулировать следующим образом:

Число $0,A$ с дробным периодом $A = (a_1 a_2 \dots a_p)_N$ имеет соответствующее представление в виде обыкновенной дроби $A / (N^p - 1)$, где p — количество цифр в периоде, а N — основание системы счисления

²Верификация — процесс проверки подлинности данных

Примеры для десятичной системы очевидны и вместе с тем показательны:

• $0,(667)_{10} = 667 / (10^3 - 1) = 667 / 999_{10}$, а также $0,(49321)_{10} = 49321 / 99999_{10}$.

Примеры для троичной системы счисления (троичные дроби):

• $0,(1211)_3 = 1211 / (3^4 - 1) = 1211 / 2222_3$, $0,(212)_3 = 212 / 222_3$, а также $0,(1)_3 = 1 / 2_3$.

Примеры для пятеричной системы счисления (пятеричные дроби):

• $0,(234)_5 = 234 / (5^3 - 1) = 234 / 444_5$, $0,(31)_5 = 31 / 44_5$, а также $0,(3)_5 = 3 / 4_5$.

Примеры для семеричной системы счисления (семеричные дроби):

• $0,(365)_7 = 365 / (7^3 - 1) = 365 / 666_7$, $0,(52)_7 = 52 / 66_7$, а также $0,(4)_7 = 4 / 6_7$.

Знаменатель у всех дробей в примерах выше фактически записывается при помощи цифры $N - 1$ (основание системы счисления N), которая повторяется столько раз, сколько цифр содержится в периоде.

Не лишним будет напомнить, что если дробь является смешанной периодической, т. е. период начинается с некоторой позиции (когда ему предшествуют цифры после запятой), то следует применить дополнительное деление на основание системы счисления столько раз, сколько цифр находятся между запятой и периодом: $0,0(1)_{10} = 1 / (9 * 10) = 1 / 90$ или $0,00(1)_{10} = 1 / (9 * 10^2) = 1 / 900$.

Также не лишним будет напомнить о возможном дуализме записи числа с использованием периодических дробей, согласно которому любое целое число можно представить двумя способами: с нулём после запятой или с периодом. Для десятичной системы это выглядит, например, так: $12,0_{10} = 11,(9)_{10}$ или $3,(9)_{10} = 4,0_{10}$, а для троичной так: $11,0_3 = 10,(2)_3$ или $2,(2)_3 = 10,0_3$. Если заметить, то это всё равно, что записать число M в виде суммы $M = (M - 1) + (N^p - 1) / (N^p - 1)$, где p — количество цифр в периоде, а N — основание системы счисления.

Заключение

Вот так воедино сплелись различные проявления свойств систем счисления, цифрового корня, делимости и периодических дробей! Конечно, для полноты картины, желательно рассмотреть и ознакомиться ещё и с другим универсальным признаком делимости (его часто называют признаком Паскаля), который основан на выделении ряда остатков от деления целого числа в десятичной системе счисления, и описан в книге [5].

В принципе, вызвать интерес к свойствам делимости чисел, системам счисления и природе открытий можно не только на уроках математики в школе, на специальных научных сменах во время каникул, но и на первых курсах университета, предоставив учащимся выполнить незамысловатый приём с вычислением цифрового корня из даты своего рождения, почтового индекса или номера телефона для начала. А далее этот увлекательный процесс уже можно продолжить и развить, обратившись к различным системам счисления, вспоминая великих математиков прошлого, курьёзные истории открытий и делая отсылки к современным алгоритмам, обеспечивающим функционирование многих бизнес-процессов. Главное при этом правильно формулировать вопросы для обозначения текущих задач, давать соответствующие пояснения и примеры, стимулируя вовлечённость и соучастие аудитории в происходящем.

Благодарности

Автор выражает признательность учительнице математики Нине Семёновне Варченко, а также преподавателю функционального анализа кандидату физико-математических наук Евгению Валерьевичу Мурашкину за их подход к обучению, способствовавший усваиванию полученных знаний.

Литература

1. *Talal Ghannam*. The Mystery of Numbers: Revealed Through Their Digital Root / Ghannam Talal // CreateSpace Independent Publishing Platform, 2011. – P. 68–73.
2. Математика: Энциклопедия / Под ред. Ю.В. Прохорова. – М. : Большая Российская энциклопедия, 2003. – 845 с.
3. Luhn test of credit card numbers. – URL: https://rosettacode.org/wiki/Luhn_test_of_credit_card_numbers (дата обращения: 26.11.2025)
4. *Цыпкин А. Г.* Справочник по математике для средних учебных заведений / А. Г. Цыпкин. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1988. – 432 с.
5. *Воробьев Н. Н.* Признаки делимости / Н.Н. Воробьев. – 4-е изд. – М. : Наука, 1988. – Т. 39. – 94 с.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ИТЕРАЦИЙ ЭКСПОНЕНТЫ

В. И. Штука

Владивостокский государственный университет

Аннотация. Настоящая статья посвящена частным вопросам определения дробных итераций экспоненты, которые могут быть применены в образовательном процессе для ознакомления учащихся с различными способами построения дробных итераций суперфункций и выявлением асимптотического поведения данных итераций на примере экспоненты методами дихотомии, вариации «нуля» и разложением в степенной ряд.

Ключевые слова: экспонента, суперфункция, тетрация, гипероператор.

Введение

Решение уравнения вида $\varphi(\varphi(x)) = e^x$, в котором определялась половинная итерация¹ экспоненты $\varphi(x)$, рассматривал Хельмут Кнезер [1] ещё в первой половине 20-го века. В своей работе он использует уравнения Абеля [2] для описания подхода к решению, а также указывает на связь с тетрацией² и необходимость учёта стационарных точек при его разложении в ряд на комплексной плоскости. Здесь уже появляются понятия передаточной функции и гипероператора (примером служит функция Вильгельма Аккермана [3]), который обобщает такие операции как сложение — гипероператор первого порядка, умножение — гипероператор второго порядка, возведение в степень — гипероператор третьего порядка. Гипероператором четвёртого порядка является тетрация, пятого — пентация, шестого — гексация и так далее...

В общем случае, уравнения Абеля для передаточной функции t и её итерации (суперфункции) t^n могут быть выражены соотношениями:

$$f(z+1) = t(f(z)), \quad g(t(z)) = g(z)+1, \quad t^n(z) = f(g(z)+n), \quad (1)$$

где f и g — взаимобратные функции ($g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$), нуждающиеся в определении, также как и t^n , в то время как функция t полагается известной.

Физической интерпретацией передаточной функции t служит коэффициент усиления/затухания сигнала f , рассчитанный для передающего канала стандартной длины, поэтому половинная его итерация ассоциируется с тем же коэффициентом, но для канала половинной длины от стандарта. Именно поэтому суперфункции имеют вполне практическое применение, например, в задачах преобразования сигналов, распространяющихся внутри волоконного лазерного усилителя, или задачах анализа неустойчивости работы реактивного двигателя по сценарию Помо-Манневила [4] или анализе аттракторов динамических систем [5].

Несмотря на то, что методика расчётов суперфункций с множеством примеров представлена в работе [6], где собраны обобщённые решения для итераций различных функций, важно отметить, что решение системы уравнений (1) для различных передаточных функций представляет собой нетривиальный процесс, базирующийся на определённом «везении» при подборе параметров первоначальных аппроксимаций и знаниях различных областей высшей математики, с которыми в подавляющем большинстве случаев не знакомы учащиеся средней школы и первых курсов университета. Именно поэтому альтернативные способы и подходы к определению нецелочисленных итераций могут оказаться востребованы в делах популяризации соответствующих разделов математического анализа и теории функций у учащихся посредством использования элементарных средств расчёта и визуализации решений.

¹Итерация — результат повторного применения какой-либо математической операции

²Тетрация (от «tetra» — четыре и «iteration» — повторение) — гипероператор четвёртого порядка

Так как экспонента имеет широкое распространение в различных разделах математики и хорошо знакома учащимся, именно её желательно избирать в качестве достойного образца для исследования и определения нецелых итераций после рассмотрения элементарных суперфункций для $t(z) = a + bz$ или, например, $t(z) = c^z$.

Функция $exp^n(z)$, называется суперэкспонентой или итерацией экспоненты и подчиняется уравнениям (1), когда $t = exp$. При таком виде передаточной функции решение для f представляет собой тетрацию экспоненты, а функция g — арктетрацию (обратную тетрацию) экспоненты, в книге [6] они имеют обозначения tet и ate соответственно.

При подборе первоначальных аппроксимаций для функции tet необходимо обращать внимание на стационарные точки, о которых не раз упоминалось в работе [1] с отсылкой как к аддитивному уравнению Абеля, так и к мультипликативному уравнению Шрёдера, для того чтобы обеспечить голоморфность искомого решения. В статье [7] применяется подход, основанный на сшивке областей, где получаются наиболее качественные расчётные аппроксимации. Данный инструментарий является довольно сложным для неискущённого учащегося, поэтому вполне допустимо использовать графические приёмы и элементарные методы математического анализа для получения дробных итераций суперэкспоненты. Означенные приёмы проще всего применить к дробным итерациям с показателем кратным двойке типа $1/2, 1/4, 1/8$ и так далее, основываясь на принципе дихотомии.

1. Аналитическое решение

Самым надёжным, доступным и проверенным способом построения половинной итерации функции является её представление в виде ряда Тейлора. Так, если положить, для простоты, что искомая функция представима обыкновенным степенным рядом

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \varphi_3 x^3 + \varphi_4 x^4 + \dots + O(x^{m+1}), \quad (2)$$

то его всё же желательно ограничить некоторой степенью m , поскольку это позволит рассматривать конечную систему нелинейных уравнений относительно коэффициентов φ_i при степенях x^i , полученную из соотношения $\varphi(\varphi(x)) = exp^n(x)$, где $n = 2^{-p}$, а $p \in N$.

Квадратичное представление ($m = 2$) ряда (2) позволяет получить точное решение для φ_0 , φ_1 , и φ_2 , однако с увеличением числа слагаемых разложения (2) нелинейность системы практически диктует необходимость обращения к математическому пакету программ, который при помощи методов типа градиентного спуска уточнит значения коэффициентов φ_i .

Таким образом, если выполнить решение сначала для полуитерации по самой функции, затем четвертьитерации по полуитерации и так далее, то можно получить аппроксимации $\varphi^*(x)$ с желаемой точностью и минимальной невязкой соотношений $\varphi^*(\varphi^*(x)) - exp^n(x)$.

Коэффициенты для соответствующих дробных итераций экспоненты $exp^n(x)$, ограниченных восьмой степенью аргумента, представлены в таблице ниже.

Поскольку ввиду своей природы итерации экспоненты являются непрерывными и монотонными функциями, то математические пакеты легко справляются с определением их нулей и значений на бесконечности. Итоги расчётов соответствующих показателей можно также увидеть в нижних строках таблицы, где $exp^n(x^*) = 0$ и $exp^n(-\infty) = y^*$.

Результаты численных расчётов, выполненных по этой незамысловатой методике позволяют произвести вычисления для любой итерации с показателем $n = 2^{-p}$ ($p \in N$), поскольку на основе базовых разложений искомого полуитераций и их суперпозиции возможно получить достаточно точную картину поведения суперэкспоненты, пример которой приведён на рис. 1 и построен на основе всего четырёх базовых дробных итераций.

При необходимости промежуточные итерации можно продолжать получать по индукции из уже имеющихся до любого заданного порядка.

Таблица

Коэффициенты разложений, нули и асимптоты дробных итераций экспоненты

n	1	1/2	1/4	1/8	1/16
1	1	0.498563	0.257389	0.132033	0.06705
x	1	0.876336	0.901154	0.939264	0.966409
x^2	1	0.495105	0.281599	0.156462	0.0834597
x^3	1	0.147437	-0.0350842	-0.058431	-0.0427061
x^4	1	-0.0228558	-0.00813648	0.0335501	0.0354916
x^5	1	0.0301378	0.0649138	0.00567239	-0.0231636
x^6	1	0.050109	-0.113276	-0.0868511	-0.0177159
x^7	1	-0.231238	-0.0307475	0.169881	0.101997
x^8	1	0.286521	0.649572	-0.0425978	-0.188721
x^*	$-\infty$	-0.696025	-0.299839	-0.142288	-0.0695922
y^*	0	-0.696025	-1.35753	-2.02484	-2.63804

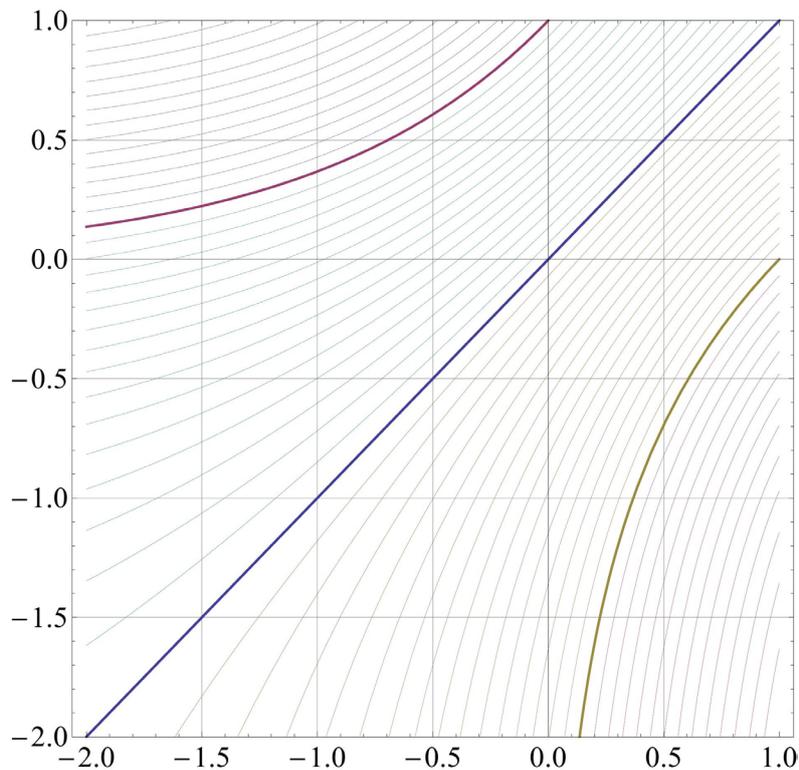


Рис. 1. График суперэкспоненты с шагом итерации 1/16

2. Графическое решение

Экспоненту с показателями итерации $1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ и так далее можно определить и графическим способом, следуя всего лишь методу вариации «нуля». Для этого метода достаточно выбрать начальную точку (так называемый «нуль» или базовый репер), расположенный между графиками функций $y = e^x$ и $y = x$, после чего начать строить последовательные отражения от них параллельных осям координат лучей, исходящих из неё в прямом и обратном направлении. В местах пересечения лучей будут возникать дополнительные реперные точки, совокупность которых позволит определить общий вид и характер искомой полуитерации.

Особенностью метода вариации «нуля» является то, что он применяется даже в отсутствии каких-либо математических пакетов программ, обладает чрезвычайной наглядностью и позволяет получать дробные итерации за достаточно короткое время. Показательно привести наряду с корректными примерами определения полуитерации экспоненты ещё и «некорректный» пример, когда базовый репер отстоит от практически точного решения — при таком «неудачном» выборе становится очевидно, как дополнительные реперные точки начинают флуктуировать и вызывать периодические изменения строящегося решения, отчего оно начинает походить на синусоиду особого вида, что явно свидетельствует о том, что «нуль» выбран неверно. Наличие знакопеременных производных первого и второго порядка будет хорошо заметно на графике, поэтому свойством монотонности такая функция обладать явно не будет.

На рис. 2 штриховыми линиями показаны асимптоты дробных итераций экспоненты. Реперные точки, по которым происходило построение решений без флуктуаций обозначены

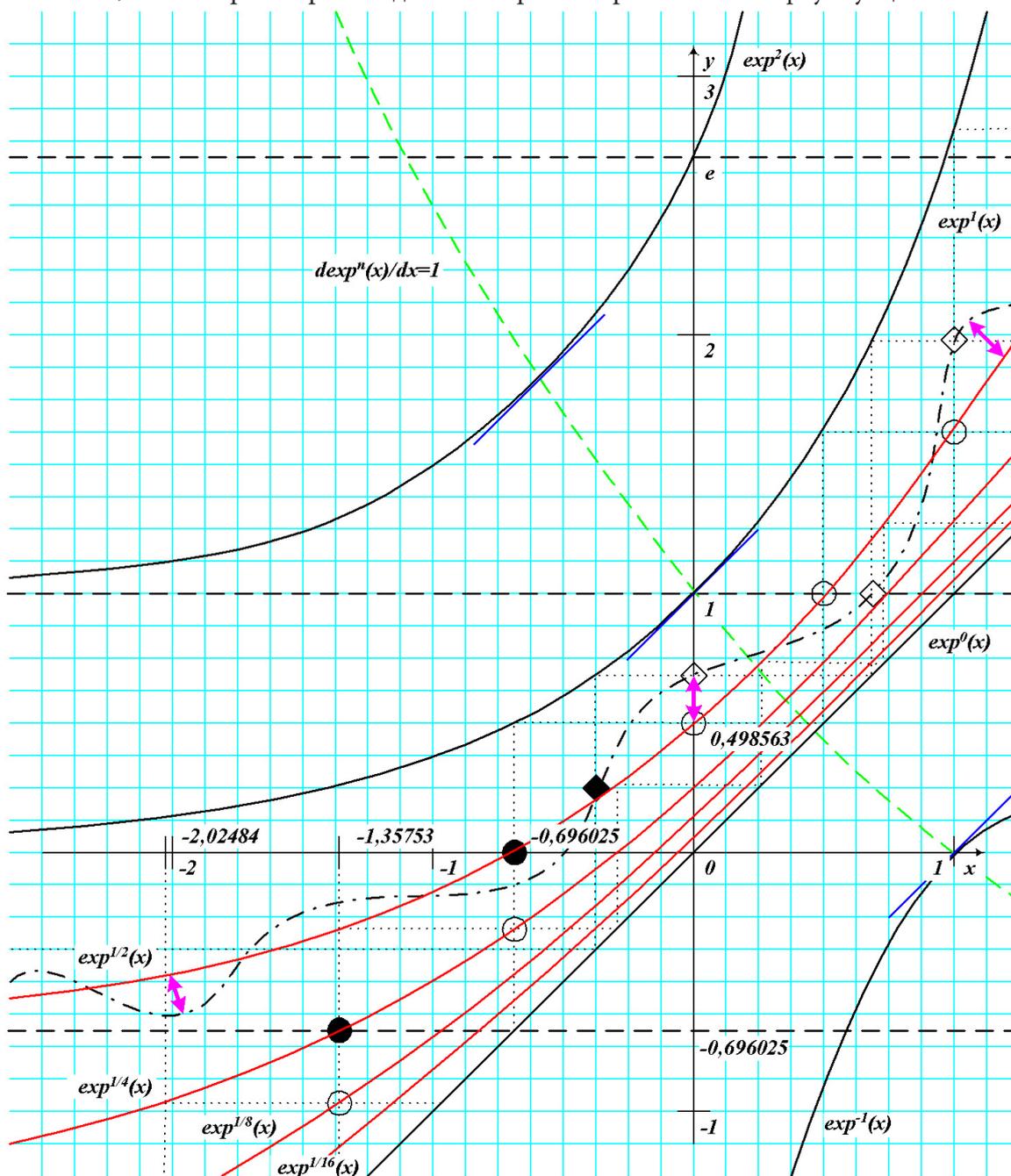


Рис. 2. Графическое построение дробных итераций экспоненты

кругами (для итерации $\exp^{1/4}$ показан «нуль» и крайний репер, для итерации $\exp^{1/8}$ — «нуль»), а реперные точки для «флуктуирующего» решения — ромбами. Крайние реперы обозначены тёмными кругами и ромбом, чтобы показать, что по ним необходимо ориентироваться для определения значения соответствующей итерации на бесконечности. График «некорректного» решения с флуктуациями обозначен штрих-пунктиром, а его отклонения от корректного решения показаны на различных участках стрелками.

Также на графике зелёным цветом отмечена штриховая линия, на которой расположены точки суперэкспоненты, в которых её касательная параллельна прямой $y = x$, определение аналитического вида которой может стать очередной задачей для пытливых умов в ближайшем будущем. Для унификации обозначений на рис. 2 суперэкспонента везде фигурирует как $\exp^n(x)$, при этом важно не забывать о пользе напоминания учащимся как о частных случаях вида $\exp^{-1}(x) = \ln(x)$ или $\exp^0(x) = x$, так и об общих соотношениях типа

$$\exp^{p+q}(x) = \exp^p(\exp^q(x)) = \exp^q(\exp^p(x)).$$

Рекомендацией к выбору базового репера может служить ориентир на координаты $x = y^*$ и $y = (\exp^{2n}(y^*) + y^*) / 2$, где y^* соответствует значению двойной итерации на бесконечности $y^* = \exp^{2n}(-\infty)$. Оказывается, что чем ближе располагается «нуль» к искомому решению, тем меньшими флуктуациями сопровождается его графическая интерпретация.

Заключение

Построение суперфункций является непростой задачей и требует высокой квалификации исследователя, который занимается их поиском. Высокий порог входа в данную область может стать серьёзным ограничением для многих учащихся, отчего применение элементарных аналитических и графических методов может быть вполне уместным для получения конкретных результатов, с целью их использования не только в научных, но и в инженерных расчётах.

Методы дихотомии, вариации «нуля» и классическое представление искомого решения в виде ряда Тейлора позволяют достичь целей как с точки зрения определения дробных итераций экспоненты, так и с точки зрения популяризации теоретической и прикладной науки, расширения кругозора учащихся, стимулированию поисков и открытий новых суперфункций.

Благодарности

Автор выражает признательность доктору физико-математических наук, профессору, члену-корреспонденту РАН Анатолию Александровичу Буренину за то, что под его руководством сильная команда преподавателей передавала студентам специальности «Прикладная математика и информатика» свой бесценный опыт и знания, особо отмечая вклад кандидата технических наук Юрия Григорьевича Израильского в части обсуждения предмета настоящей статьи (декабрь 2013 года) со ссылками на работы авторов, занимавшихся данным вопросом.

Литература

1. *Kneser Hellmuth*. Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\varphi(\varphi(x)) = e^x$ und verwandter Funktionalgleichungen / Hellmuth Kneser // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1950. – 187. – S. 56–67.
2. *Abel N. H.* Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen x und y , wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, ... / N. H. Abel // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1826. – 1. – S. 11–15.
3. *Ackermann W.* Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen / W. Ackermann // Mathematische Annalen. – 1928. – 99. – P. 118–133. – DOI:10.1007/BF01459088

4. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems / Y. Pomeau, P. Manneville // *Communications in Mathematical Physics.* – 1980. – V. 74. – P. 189.
5. *Eckmann J.-P.* Roads to turbulence in dissipative dynamical systems / J.-P. Eckmann // *Rev. Mod. Phys.* – 1981. – 53. – P. 643–654.
6. *Кузнецов Д. Ю.* Суперфункции. Нецелые итерации голоморфных функций. Тетрация и другие суперфункции. Формулы, алгоритмы, графики и комплексные карты / Д. Ю. Кузнецов // Изд-во: LAP Lambert Academic Publishing GmbH KG, 2014. – 328 с.
7. *Kouznetsov D.* Solution of $F(z+1) = \exp(F(z))$ in the complex z -plane / D. Kouznetsov // *Mathematics of Computation.* – 2009. – 78: 267. – P. 1647–1670.